ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αγαπητοί συνάδελφοι,
Φίλοι μαθητές και μαθήτριες

Η καινούργια μας σειρά βιβλίων με τον τίτλο "**ΒΙΒΛΙΟμαθήματα**" δημιουργήθηκε από μια ιδέα μας για το περιοδικό "**Εξετάσεις**" της Ελευθεροτυπίας. Παρουσιάσαμε στην εφημερίδα τα μαθήματα, όπως γίνονται στον πίνακα, δημιουργώντας για το σκοπό αυτό την πολυπληθέστερη συγγραφική ομάδα που έχει ποτέ συσταθεί, προσπαθώντας την εμπειρία της τάξης να την αποτυπώσουμε στο χαρτί. Τη συγγραφική ομάδα αποτελούν καθηγητές συγγραφείς καταξιωμένοι στη συνείδηση γονιών και μαθητών για την ποιότητα της δουλειάς τους.

Η συλλογική αυτή προσπάθεια, εμπλουτισμένη, σε σχέση με το υλικό που παρουσιάστηκε στην εφημερίδα, απευθύνεται, αφενός στον καθηγητή που θέλει να παρουσιάσει το μάθημά του στην τάξη με μια μεθοδικότητα, αφετέρου στο φιλόπονο μαθητή που θέλει να διαβάσει, να μελετήσει και να κατανοήσει την ύλη, χωρίς να σπαταλήσει τον πολύτιμο χρόνο του.
Γι' αυτό κάθε μάθημα ολοκληρώνεται σ'έναν τόμο. Στο βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιέχονται μια σειρά από νέες, στην Ελληνική βιβλιογραφία, ασκήσεις καθώς και συνδυαστικά θέματα.

Ο σκοπός μας: να δημιουργήσουμε ένα "**εργαλείο δουλειάς**" για όλους μας.

Η ύλη χωρίστηκε σε **10 ΒΙΒΛΙΟμαθήματα** που το καθένα περιέχει:

- Τις απαραίτητες γνώσεις θεωρίας, με παρατηρήσεις για βαθύτερη κατανόηση.
- Λυμένα παραδείγματα, στα οποία καταδεικνύεται η μεθοδολογία επίλυσής τους σε **κίτρινο πλαίσιο**.
- Λυμένες ασκήσεις.
- Τα προτεινόμενα θέματα με υποδείξεις - απαντήσεις σε **μπλέ πλαίσιο**.
- Το "**ξεχωριστό θέμα**".

Όσοι από τους συναδέλφους επιθυμούν να έχουν τις λύσεις των ασκήσεων, για έλεγχο των απαντήσεων, με χαρά θα τις στείλουμε αν επικοινωνήσουν μαζί μας. Επίσης, θα θέλαμε κρίσεις, παρατηρήσεις, καθώς και επισημάνσεις γι' αυτή μας την προσπάθεια, ώστε η γόνιμη αυτή ανταλλαγή απόψεων να βοηθήσει στη βελτίωση των μελλοντικών μας εκδόσεων.

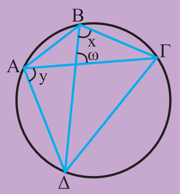
Η συγγραφική ομάδα

Περιεχόμενα

1ο Κεφάλαιο

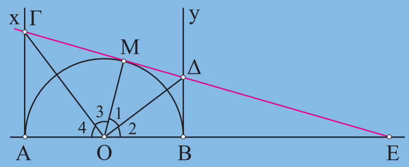
1ο μάθημα

Εγγεγραμμένα σχήματα



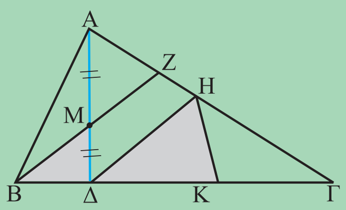
2ο μάθημα

Αναλογίες



3ο μάθημα

Ομοιότητα



Μάθημα 1

Εγγεγραμμένα σχήματα

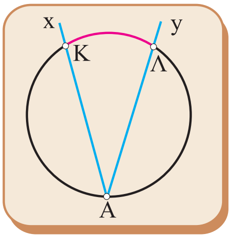
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Σκοπός του μαθήματος είναι να δώσει στους μαθητές συνοπτικά τις απαραίτητες γνώσεις από τη διδακτέα ύλη της Α΄λυκείου που δεν διδάχθηκε ή διδάχθηκε περιληπτικά.

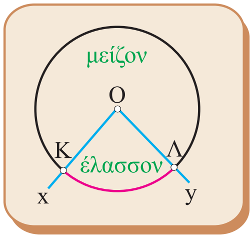
Εγγεγραμμένη γωνία

Ορισμός

Μια γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη σε κύκλο**, όταν η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.



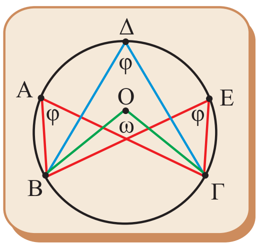
Μια γωνία, της οποίας η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο λέγεται **επίκεντρη**.
Σε κάθε επίκεντρη γωνία αντιστοιχίζουμε ένα από τα δύο τόξα (βλ. σχήμα) του κύκλου με άκρα Κ και Λ το οποίο ονομάζουμε **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης γωνίας. Λέμε τότε ότι η γωνία **βαίνει** στο τόξο $\overset{\frown}{ΚΛ}$.



Αν δεν αναφέρεται κάτι άλλο θα θεωρούμε στα επόμενα ότι οι γωνίες βαίνουν στο έλασσον τόξο (κυρτές γωνίες). Το μέτρο της επίκεντρης γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει.

Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης (δηλαδή της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο π.χ. στο διπλανό σχήμα είναι ω = 2φ.
Σε κάθε τόξο μπορεί να βαίνει μια μόνο επίκεντρη γωνία, όμως σε αυτό μπορούν να βαίνουν άπειρες εγγεγραμμένες.



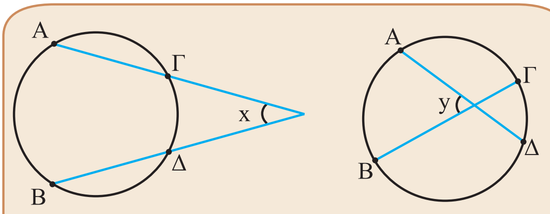
Πορίσματα

α. Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας είναι ίσο με το μισό του αντίστοιχου τόξου.

β. Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες.

γ. Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα, ίσων κύκλων είναι ίσες.
δ. Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο είναι ορθές.

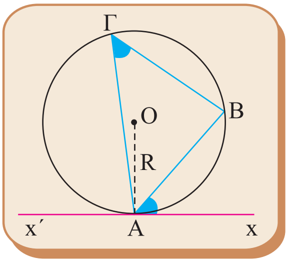
Γωνία δύο τεμνουσών



$x = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{2}$

Γωνία χορδής και εφαπτομένης

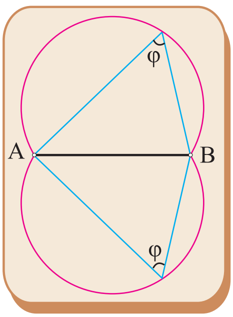
Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε χορδή ΑΒ και την εφαπτομένη στο σημείο Α, την x΄Αx. Κάθε μία από τις γωνίες ΒΑx και ΒΑx΄ λέγεται **γωνία χορδής και εφαπτομένης**.
Η οξεία γωνία ΒΑx λέγεται γωνία της χορδής ΑΒ και του κύκλου (O,R) .
Το τόξο ΑΒ που περιέχεται μεταξύ των πλευρών της γωνίας χορδής και εφαπτομένης λέγεται **αντίστοιχο τόξο της γωνίας αυτής**.



Η γωνία χορδής και εφαπτομένης είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο της χορδής.

Βασικός Γεωμετρικός Τόπος

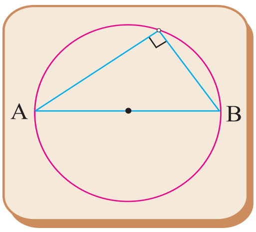
Ολές οι εγγεγραμμένες γωνίες στο ίδιο τόξο είναι ίσες. Οι κορυφές των γωνιών αυτών "βλέπουν τη χορδή του τόξου με ίσες γωνίες". Λέμε λοιπόν ότι:



Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα ΑΒ φαίνεται υπό γωνία $\hat{\varphi}$ είναι δύο τόξα κύκλων συμμετρικά ως προς την ΑΒ. Από τα τόξα εξαιρούνται τα σημεία Α και Β.

Πόρισμα

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα φαίνεται υπό ορθή γωνία είναι κύκλος διαμέτρου ΑΒ. Εξαιρούνται τα άκρα Α και Β του τμήματος.

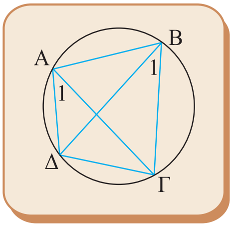


Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου. Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** σε κύκλο, αν υπάρχει κύκλος, που διέρχεται από τις κορυφές του.

Θεώρημα

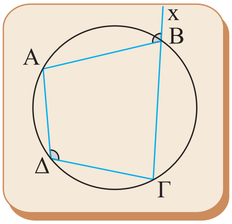
Ένα τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις εξής ιδιότητες:



α. Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές

$\left(\hat{A}+\hat{\Gamma}=180^{o} \quad \text{και} \quad \hat{B}+\hat{\Delta}=180^{o}\right)$

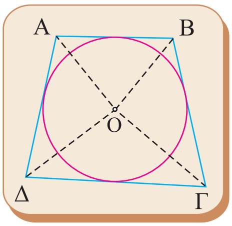
β. Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές με ίσες γωνίες, π.χ. $\left(\hat{A}_1=\hat{B}_1\right)$



γ. Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι ίση με την απέναντι εσωτερική του γωνία.

Θεώρημα (Κριτήριο)
Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν έχει μία από τις παρακάτω ιδιότητες:
α. Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
β. Μια πλευρά του "φαίνεται" από τις απέναντι κορυφές με ίσες γωνίες.
γ. Μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική του γωνία.

Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγεγραμμένο** σε κύκλο, αν όλες οι πλευρές του εφάπτονται στον κύκλο.
Σε κάθε περιγγεγραμμένο τετράπλευρο ισχύουν οι ιδιότητες:



α. Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
β. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγράψιμο** σε κύκλο, αν υπάρχει κύκλος που εφάπτεται στις πλευρές του.

Θεώρημα (Κριτήριο)
Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν:
α. Οι διχοτόμοι τριών τουλάχιστον γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
β. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

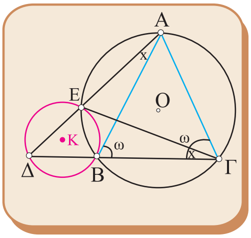
Η Αναλυτική Μέθοδος (Πλάτωνας 430 - 347 π. Χ.)

Οι αποδεικτικές μέθοδοι - συνθετική μέθοδος, η μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο και η μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής και της τέλειας επαγωγής - είναι γνωστές από την Άλγεβρα και χρησιμοποιούνται και στη λύση γεωμετρικών προβλημάτων.
Οι παραπάνω μέθοδοι δεν μας δίνουν ικανοποιητικά στοιχεία για το πως βρέθηκε η απόδειξη μιας πρότασης. Γι' αυτό ακολουθούμε την επόμενη σειρά συλλογισμών που λέγεται **ανάλυση**.
Δεχόμαστε ότι το πρόβλημα ή η ζητούμενη πρόταση αληθεύει και τη μετασχηματίζουμε διαδοχικά με τη βοήθεια γνωστών προτάσεων και θεωρημάτων μέχρι να καταλήξουμε σε μία αληθινή πρόταση ή σε μία πρόταση που δίνεται στην υπόθεση του προβλήματος.
Δηλαδή:
Έστω ότι η ζητούμενη πρόταση είναι η **Π**.
Δεχόμαστε ότι η **Π** είναι αληθινή και τη μετασχηματίζουμε διαδοχικά στις προτάσεις $\mathbf{\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\nu}$, όπου η τελευταία πρόταση $\mathbf{\Pi_\nu}$ είναι αληθινή ή δοσμένη στην υπόθεση του προβλήματος.
Οι παραπάνω προτάσεις είναι οι προτάσεις της ανάλυσης και διατυπωμένες με αντίστροφη σειρά αποτελούν τη σύνθεση.
Η λύση ενός προβλήματος παρουσιάζεται (διατυπώνεται) σχεδόν πάντοτε με τη σύνθεση.

Παράδειγμα 1

Στον κύκλο (Ο, ρ) παίρνουμε τις χορδές ΑΒ = ΑΓ και φέρνουμε από το Α ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στο Ε και τη ΒΓ στο Δ. Να δειχθεί ότι η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου, που διέρχεται από τα σημεία Β, Δ, Ε.

Λύση



Διατυπώνουμε τις προτάσεις της ανάλυσης:

Π : Δεχόμαστε ότι η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Π_1 : $\widehat{A\Delta B} = \widehat{EBA}$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης)

Π_2 : $\widehat{EBA} = \widehat{E\Gamma A}$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο ΑΕ)

Π_3 : $\widehat{E\Gamma A} = \omega - x$ (βλ. σχήμα)

Π_4 : $\widehat{A\Delta B} = \omega - x$ (διότι η γωνία ω είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΔΒ)

Οι παραπάνω προτάσεις μας οδηγούν στη διατύπωση της λύσης η οποία είναι:

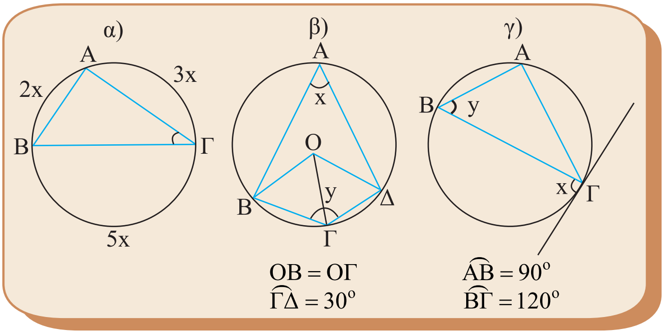
$\widehat{A\Delta B} = \omega - x$, διότι η γωνία ω είναι εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΔΒ και $\widehat{E\Gamma A} = \omega - x$

οπότε $\widehat{A\Delta B} = \widehat{E\Gamma A}$ και $\widehat{A\Delta B} = \widehat{EBA}$, που σημαίνει ότι η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y (όπου x, y γωνίες ή τόξα ανάλογα).



Λύση

α. Τα άθροισμα των τόξων του κύκλου είναι:

$2x + 3x + 5x = 360^o$. Άρα $10x = 360$, οπότε $x = 36^o$.

Έτσι έχουμε $\widehat{AB} = 2 \cdot 36 = 72^o$ και $y = \dfrac{\widehat{AB}}{2} = \dfrac{72^o}{2} = 36^o$

β. Φέρνουμε την OΓ και παρατηρούμε ότι το τρίγωνο OBΓ είναι ισόπλευρο ($OA = OB = BΓ = R$, R είναι η ακτίνα του κύκλου).

Είναι $\widehat{BOΓ} = 60^o$, οπότε και $\widehat{BΓ} = 60^o$.

Από την υπόθεση είναι $\widehat{BΔ} = \widehat{BΓ} + \widehat{ΓΔ} = 60^o + 30^o = 90^o$. Άρα $\hat{x} = 45^o$.

Το τόξο $\widehat{BAΔ}$ είναι $360^o - 90^o = 270^o$. Άρα $\hat{y} = \widehat{BΓΔ} = \dfrac{270^o}{2} = 135^o$

γ. Ισχύει $\widehat{BAΓ} = \hat{x}$ διότι η $\hat{x}$ είναι γωνία υπο χορδής και εφαπτομένης και η $\widehat{BAΓ}$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο που ορίζει η χορδή BΓ.

Όμως $\widehat{BAΓ} = \dfrac{\widehat{BΓ}}{2} = \dfrac{120^o}{2} = 60^o$, οπότε $\hat{x} = 60^o$.

Στο τρίγωνο ABΓ ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = 180^o$. Όμως $\hat{A} = 60^o$ και $\hat{Γ} = \dfrac{\widehat{AB}}{2} = \dfrac{90^o}{2} = 45^o$.

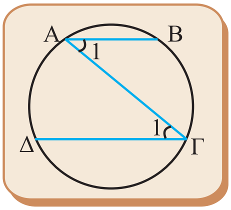
Άρα $60^o + \hat{B} + 45^o = 180^o$ οπότε $\hat{y} = \hat{B} = 75^o$

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι τα τόξα που περιέχονται ανάμεσα σε παράλληλες ευθείες είναι ίσα.

Λύση

Έστω ΑΒ, ΓΔ, δύο παράλληλες χορδές ενός κύκλου. Φέρνουμε τη χορδή ΑΓ. Τότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ τεμνομένων από την ΑΓ. Όμως σε ίσες εγγεγραμμένες γωνίες αντιστοιχούν ίσα τόξα άρα $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma}$



Άσκηση 3

Δείξτε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών κυρτού τετραπλεύρου, τεμνόμενες ανα δύο σε διαφορετικά σημεία σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

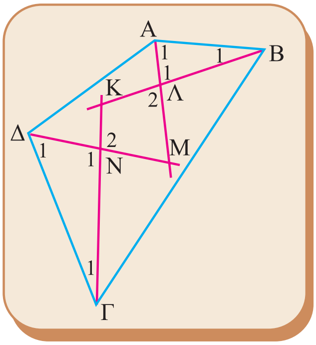
Λύση

Έστω ΑΛ, ΒΛ, ΓΝ, ΔΝ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$, αντίστοιχα.

Στο τρίγωνο ΑΒΛ ισχύει $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{\Lambda}_1 = 180^o$ (1).

Στο τρίγωνο ΓΔΝ ισχύει $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Gamma}_1 + \hat{N}_1 = 180^o$ (2).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 + \hat{\Lambda}_1 + \hat{N}_1 = 360^o$.



Άρα $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} + \frac{\Delta}{2} + \hat{\Lambda}_1 + \hat{N}_1 = 360^o$

ή $\frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta}}{2} + \hat{\Lambda}_1 + \hat{N}_1 = 360^o$.

Όμως $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^o$. Άρα $\frac{360^o}{2} + \hat{\Lambda}_1 + \hat{N}_1 = 360^o$, οπότε $\hat{\Lambda}_1 + \hat{N}_1 = 180^o$.

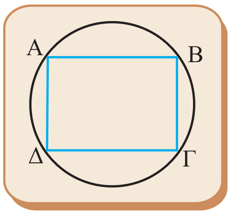
Άρα $\hat{\Lambda}_2 + \hat{N}_2 = 180^o$. Έτσι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές οπότε είναι εγγράψιμο.

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι μία γωνία του είναι ορθή. Ξέρουμε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, οπότε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ (1). Επίσης σε κάθε εγγράψιμο τετράπλευρο οι απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές, άρα $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^o$ (2). Από (1) και (2) έχουμε $2\hat{A} = 180^o \Leftrightarrow \hat{A} = 90^o$.



Έτσι δείξαμε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

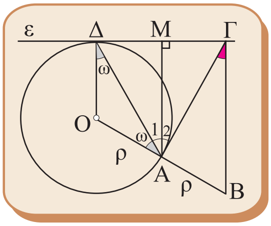
Άσκηση 5

Στην προέκταση της ακτίνας ΟΑ κύκλου (Ο, ρ), παίρνουμε τμήμα ΑΒ = ΟΑ και φέρνουμε τη ΒΓ κάθετη σε τυχαία εφαπτομένη ε του κύκλου. Να δειχθεί ότι:

$$\widehat{ΟΑΓ} = 3 \cdot \widehat{ΑΓΒ}$$

Λύση

Έστω Δ είναι το σημείο επαφής της ευθείας ε και του κύκλου (Ο,ρ). Το ΟΔΓΒ είναι τραπέζιο. Φέρνουμε την $ΑΜ \perp ε$. Η ΑΜ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΟΔΓΒ. Το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές (ΑΜ ύψος και διάμεσος). ΄Αρα $\widehat{Α_1} = \widehat{Α_2} = \widehat{ΑΓΒ}$ (εντός εναλλάξ).



Ακόμα $\widehat{ΟΔΑ} = \hat{ω} = \widehat{Α_1} = \widehat{Α_2}$. Επομένως, $\widehat{ΟΑΓ} = 3\hat{ω} = 3 \cdot \widehat{ΑΓΒ}$

Άσκηση 6

Δύο κύκλοι (Κ,ρ) και (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Φέρνουμε μία χορδή ΑΒ του κύκλου (Κ,ρ) και τη χορδή $ΑΓ \perp ΑΒ$ του κύκλου (Λ,ρ). Να δειχθεί ότι: $ΒΓ // = ΚΛ$

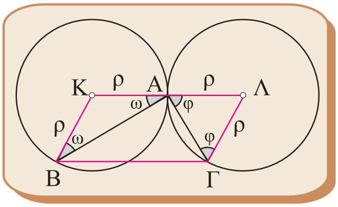
Λύση

Τα τρίγωνα ΚΒΑ και ΑΛΓ είναι ισοσκελή. Επειδή:

$\widehat{ΒΑΓ} = 90^o \Leftrightarrow \hat{ω} + \hat{φ} = 90^o \Leftrightarrow 2\hat{ω} + 2\hat{φ} = 180^o \Leftrightarrow$

$\hat{Κ} + \hat{Λ} = 180^o \Leftrightarrow ΚΒ // ΓΛ$

Είναι ακόμα $ΚΒ = ΛΓ = ρ$. Συνεπώς το ΚΒΓΛ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $ΒΓ // = ΚΛ$.



Άσκηση 7

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τη διάμετρο ΑΒ, τη χορδή ΑΓ και τη διχοτόμο της γωνίας ΒΑΓ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και την ΒΓ στο Δ. Αν η ΑΜ τέμνει στο σημείο Ζ την εφαπτομένη του κύκλου στο Β, να δειχθεί ότι: ΔΜ = ΜΖ.

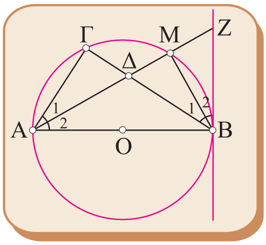
Λύση

Είναι $\widehat{Β_2} = \widehat{Α_2}$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης ίση με την αντίστοιχη εγγεγραμμένη)

Είναι $\widehat{Β_1} = \widehat{Α_1}$ (εγγεγραμμένες στο $\widehat{ΓΜ}$) και $\widehat{ΑΜΒ} = 90^o$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο)

Επειδή $\widehat{Α_1} = \widehat{Α_2} \Leftrightarrow \widehat{Β_1} = \widehat{Β_2}$.

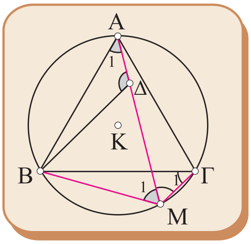
Άρα το τρίγωνο ΔΒΖ είναι ισοσκελές (ΒΜ ύψος και διχοτόμος).
Επομένως η ΒΜ είναι διάμεσος, οπότε $ΔΜ = ΜΖ$.



Άσκηση 8

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, ο περιγγεγραμμένος κύκλος του (Κ,R) και τυχαίο σημείο Μ του τόξου ΒΓ. Να δειχθεί ότι: $ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ$

Λύση



Παίρνουμε στη ΜΑ τμήμα $ΜΔ = ΜΒ$. Το τρίγωνο ΜΒΔ είναι ισόπλευρο (ισοσκελές και $\widehat{Μ_1} = 60^o$). Επομένως $\widehat{Δ_1} = 120^o$.

Είναι τρίγωνο ΑΒΔ = τρίγωνο ΒΜΓ διότι:

$$ΑΒ = ΒΓ, \quad \widehat{ΒΜΓ} = \widehat{Δ_1} = 120^o, \quad \widehat{Γ_1} = \widehat{Α_1}$$

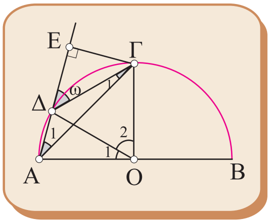
Επομένως $ΑΔ = ΜΓ$. Είναι $ΜΔ = ΜΒ$ και $ΑΔ = ΜΓ$.

Άρα $ΜΔ + ΑΔ = ΜΒ + ΜΓ$ ή $ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ$

Άσκηση 9

Το σημείο Γ είναι μέσο ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ. Αν Δ σημείο του τόξου ΑΓ και Ε η προβολή του Γ στην ευθεία ΑΔ, να δειχθεί ότι: ΓΕ = ΕΔ.

Λύση



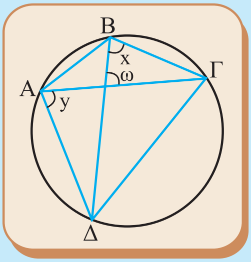
Αν Ο μέσον του ΑΒ, τότε είναι $\widehat{ΑΟΓ} = 90^o$.

Από το τρίγωνο ΔΑΓ έχουμε: $\hat{ω} = \widehat{Α_1} + \widehat{Γ_1}$. Επειδή $\widehat{Α_1} = \frac{1}{2}\widehat{Ο_2}$ και $\widehat{Γ_1} = \frac{1}{2}\widehat{Ο_1}$ (Η εγγεγραμμένη είναι ίση με τη μισή αντίστοιχη επίκεντρη), έχουμε:

$$\hat{ω} = \frac{1}{2}\widehat{Ο_2} + \frac{1}{2}\widehat{Ο_1} = \frac{1}{2}\left(\widehat{Ο_2} + \widehat{Ο_1}\right) = \frac{1}{2}\widehat{ΑΟΓ_1} = \frac{1}{2}90^o$$

Άρα $\hat{ω} = 45^o$. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΔ είναι και ισοσκελές και επομένως $ΓΕ = ΕΔ$.

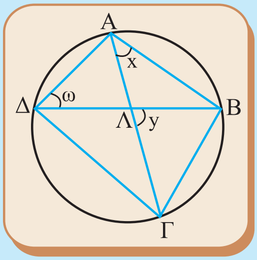
Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ



1. Δίνονται: $\widehat{ΒΑΓ} = 35^o$, $ΑΒ = 60^o$ και $\widehat{ΑΓΔ} = 40^o$.
Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστές) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις.

α. $\widehat{ΒΓ} = 35^o$ **β.** $\widehat{ΓΔ} = 150^o$ **γ.** $\hat{ω} = 70^o$

δ. $\hat{x} = \hat{y}$ **ε.** $\hat{x} = 75^o$



2. Στο διπλανό σχήμα είναι:

$\widehat{ΑΔ} = 80^o$, $\widehat{ΓΔ} = 120^o$, $\hat{y} = 70^o$

Να βρείτε τις γωνίες $\hat{x}$ και $\hat{ω}$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β} > \hat{Γ}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $(Ο,R)$. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ, τη διχοτόμο ΑΕ και τη διάμεσο ΑΟΚ. Να δείξετε ότι $\widehat{ΔΑΚ} = \hat{Β} - \hat{Γ}$.

(**Υπ:** Φέρνουμε την ΓΚ και δείχνουμε ότι $\widehat{ΑΚΓ} = \hat{Β}$ και $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΚΑΓ}$)

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΖ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι εγγράψιμο.

(**Υπ:** $\widehat{ΒΕΓ} = \widehat{ΓΖΒ} = 90^o$)

5. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από τα Α και Β φέρνουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ΄ και τον άλλο στα Δ και Δ΄. Να δείξετε ότι ΓΓ΄//ΔΔ΄

(**Υπ:** Δείξτε ότι σχηματίζονται εντός εκτός και επι τ'αυτά γωνίες ίσες)

6. Σε κύκλο κέντρου Ο δίνεται η διάμετρος ΑΒ. Φέρνουμε την ακτίνα $ΟΓ \perp ΑΒ$ και τυχαία χορδή ΓΔ, που τέμνει την ΟΒ στο Ε. Αν η εφαπτομένη στο Δ τέμνει την ΑΒ στο Ζ, να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΕΖΔ είναι ισοσκελές.

7. Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ τέμνονται στα σημεία Α και Β. Φέρνουμε τις διαμέτρους ΑΚΓ και ΑΛΔ και τις χορδές ΓΖ//ΔΕ. Να δειχθεί ότι τα σημεία Ζ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

8. Δίνονται οι κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ κύκλου (Ο,ρ), που τέμνονται στο Ι. Ονομάζουμε Ν και Ρ τα μέσα των χορδών ΑΔ και ΓΒ. Να δειχθεί:

α. $ΙΜ \perp ΒΓ$ και $ΙΡ \perp ΑΔ$,

β. $ΟΜ = ΓΒ/2$ και $ΟΡ = ΑΔ/2$

9. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ γράφουμε ημικύκλιο με διάμετρο ΑΔ και τόξο κύκλου (Α, ΑΔ) μέσα στο τετράγωνο. Φέρνουμε από το Α ευθεία ε, που τέμνει το ημικύκλιο στο Ε και το τόξο στο Ζ. Αν $ΖΚ \perp ΔΓ$, να δειχθεί ότι: $ΕΖ = ΖΚ$

10. Στον κύκλο με κέντρο Ο, παίρνουμε τη διάμετρο ΑΒ και την ακτίνα $ΟΓ \perp ΑΒ$. Στις προεκτάσεις της διαμέτρου ΑΒ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΒΕ. Οι ΓΔ και ΓΕ, τέμνουν το κύκλο στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι:

α. ΖΔ = ΗΕ **β.** ΖΗ // ΔΕ

11. Οι κορυφές τραπεζίου (ΑΒ//ΔΓ) είναι σημεία του κύκλου (Κ,ρ). Να δείξετε ότι, η γωνία των εφαπτόμενων του κύκλου αυτού, στα σημεία Α και Γ, είναι ίση με τη γωνία των ευθειών ΑΔ και ΒΓ.

12. Σε κύκλο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ, παίρνουμε σημείο Γ της ΑΒ. Γράφουμε τους κύκλους με διαμέτρους τα ΑΓ και ΓΒ. Ευθεία ε περνάει από το Γ και τέμνει τους τρεις κύκλους κατά σειρά στα σημεία Δ, Ε, Ζ και Η. Να δειχθεί ότι: ΔΕ = ΖΗ

13. Από τυχαίο σημείο του περιγγεγραμμένου σε τρίγωνο κύκλου φέρνουμε τις κάθετες στις τρεις πλευρές του. Να δειχθεί ότι τα ίχνη των τριών καθέτων βρίσκονται σε ευθεία γραμμή (ευθεία Simson).

14. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Β και Δ. Ευθεία, που περνάει από το Β τέμνει τους κύκλους στα σημεία Α και Γ. Οι ευθείες ΑΔ και ΓΔ τέμνουν αντίστοιχα τους κύκλους στα Ε και Ζ και οι ευθείες ΑΖ, ΓΕ, τέμνονται στο Η. Να δειχθεί ότι το τετράπλευρο ΔΕΗΖ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

15. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ\ (\widehat{Α} = 90^o)$ ονομάζουμε ρ την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου. Να δειχθεί ότι: $β + γ = 2ρ + α$

16. Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ, ρ). Φέρνουμε την εφαπτομένη Αx και ευθεία ε // Αx, που τέμνει την ΑΓ στο Δ και την ΑΒ στο Ε. Να δειχθεί ότι το ΒΓΔΕ είναι εγγράψιμο.

17. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγραμμένο σε κύκλο (Κ, ρ). Φέρνουμε τις $ΓΖ \perp ΒΔ$ και $ΒΕ \perp ΑΓ$. Να δειχθεί ότι ΖΕ // ΑΔ.

18. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), φέρνουμε το ύψος ΑΑ΄, το ορθόκεντρο Η και το μέσο Κ του τμήματος ΑΗ. Ο κύκλος (Κ, ΚΑ) τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να δειχθεί ότι η Α΄Ζ είναι εφαπτόμενη του (Κ, ΚΑ)

19. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από τα Α και Β, φέρνουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ΄ και τον άλλο στα Δ και Δ΄. Να δειχθεί ότι ΓΓ΄//Δ΄.

20. Στο τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζουμε δύο κύκλους, που περνάνε από τις κορυφές του Β και Γ και τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ ο ένας στα σημεία Ε, Ζ και ο άλλος στα σημεία Ε΄ και Ζ΄. Να δείξετε ότι ΕΖ // Ε΄Ζ΄.

21. Το σημείο Μ είναι το μέσο ενός κυρτογώνιου τόξου ΑΒ και Γ, Δ είναι δύο σημεία του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΒ κύκλου (Ο, ρ). Οι χορδές ΜΓ και ΜΔ τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Κ και Λ, Να δειχθεί ότι το τετράπλευρο ΓΚΛΔ είναι εγγράψιμο.

22. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ (μη περιγράψιμο) ονομάζουμε Κ, Λ, Μ, Ρ, τα σημεία όπου τέμνονται οι διχοτόμοι των διαδοχικών γωνιών του. Να δειχθεί ότι τα σημεία αυτά είναι ομοκυκλικά.

23. Σε γωνία $\widehat{xOy}$ παίρνουμε τη διχοτόμο ΟΔ και το εσωτερικό της σημείο Ρ της $\widehat{\Delta Oy}$. Αν Α, Β, Γ είναι οι προβολές του Ρ στις ημιευθείες ΟΔ, Οx, Οy, να δειχθεί ότι:
α. Τα σημεία Ο, Β, Α, Ρ, Γ είναι ομοκυκλικά **β.** ΑΒ = ΑΓ

24. Οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ε και οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ στο Ζ. Η διχοτόμος της γωνίας Ε, τέμνει τις ΒΓ, ΑΔ στα σημεία Κ, Μ και η διχοτόμος της $\hat{Z}$ τέμνει τις πλευρές ΓΔ και ΑΒ, στα Λ, Ρ. Να δείξετε ότι:
α. Οι διχοτόμοι των Ε και Ζ τέμνονται κάθετα
β. Το τετράπλευρο ΚΛΜΡ είναι ρόμβος.

25. Παίρνουμε το τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Μ και Ν των ΑΒ και ΒΓ. Η κάθετη της ΑΒ στο Μ τέμνει την ΑΓ στο Ρ και η κάθετη στο Ν της ΝΡ τέμνει την ΑΒ στο Δ.
Να δείξετε ότι: $\widehat{N P \Delta} = \hat{A}$

Ε. "ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ"

1. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΒΓ και την εφαπτομένη του σε σημείο Α διάφορο των Β, Γ η οποία τέμνει την διάμετρο ΒΓ στο σημείο Δ. Αν είναι $\overset{\frown}{AB} = 56^o$ να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α. Με διάμετρο την ΑΒ γράφουμε κύκλο και έστω Δ το σημείο τομής του με την υποτείνουσα. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδειχθεί ότι ΕΓ = ΕΔ.

Μάθημα 2

Αναλογίες

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΓΔ ονομάζεται ο θετικός αριθμός λ για τον οποίο ισχύει: $ΑΒ = λ \cdot ΓΔ \Leftrightarrow \frac{ΑΒ}{ΓΔ} = λ$

Μέτρο ενός ευθυγράμμου τμήματος ονομάζεται ο λόγος του μεγέθους προς το μέ-γεθος ενός άλλου ευθυγράμμου τμήματος που θεωρείται σαν μονάδα μέτρησης.

Πόρισμα: Δυο ίσα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ίσα μέτρα και αντιστρόφως.

Θεώρημα: Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ισούται με το λόγο των μηκών τους ως προς την ίδια μονάδα μέτρησης και είναι ανεξάρτητα από τη μονάδα μέτρησης.

Αναλογία είναι η ισότητα λόγων. Η σχέση $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} = λ$ είναι αναλογία με λόγο λ και όρους τα τμήματα α,β,γ,δ. Στην πιο πάνω αναλογία τα τμήματα α και γ λέγονται **ανάλογα** των β και δ. Τα α και δ λέγονται **άκροι** όροι ενώ τα β και γ **μέσοι** της αναλογίας. Ο τέταρτος όρος δ λέγεται τέταρτη ανάλογος των α, β και γ. Στην αναλογία $\frac{α}{β} = \frac{β}{γ}$ οι μέσοι όροι είναι ίσοι. Αυτή η αναλογία λέγεται **συνεχής** και ο β λέγεται **μέση ανάλογος** ή **γεωμετρικός μέσος** των α και γ.

Ιδιότητες των αναλογιών.

$\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} \Leftrightarrow αδ = βγ$,

$\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} \Leftrightarrow \frac{α}{γ} = \frac{β}{δ}$

$\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} \Leftrightarrow \frac{δ}{β} = \frac{γ}{α}$

$\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} \Leftrightarrow \frac{α \pm β}{β} = \frac{γ \pm δ}{δ}$,

$\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} \Leftrightarrow \frac{α}{α \pm β} = \frac{γ}{γ \pm δ}$

$\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} = \ldots = \frac{κ}{λ} = \frac{α + γ + \ldots + κ}{β + δ + \ldots + λ}$

Αρμονική διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος

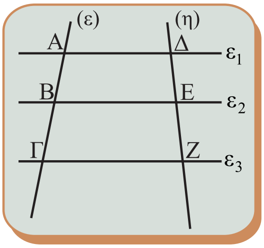
Σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, για κάθε εσωτερικό σημείο Μ του ΑΒ υπάρχει ένα εξωτερικό σημείο Ν του ΑΒ τέτοιο ώστε : $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}$

Τα σημεία Μ και Ν ονομάζονται **αρμονικά συζυγή** των Α και Β και τα τέσσερα σημεία Α, Μ, Β, Ν λέγονται αρμονική τετράδα.

Ιδιότητες

1. Τα σημεία Ν και Μ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του μέσου του ΑΒ.
2. Αρμονικό συζυγές του μέσου δεν ορίζεται.
3. Αν τα Μ και Ν είναι αρμονικά συζυγή των Α και Β, τότε τα Α και Β είναι αρμονικά συζυγή των Μ και Ν.
4. Αν Ο το μέσο του ΑΒ τότε ισχύει $OA^2=OM\cdot ON$ και αντίστροφα.
5. Σε κάθε αρμονική σημειοσειρά ισχύει: $\frac{2}{AB}=\frac{1}{AM}\pm\frac{1}{AN}$

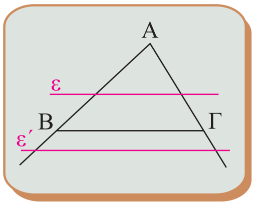
Θεώρημα Θαλή



Αν (τρεις τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, ορίζουν σ' αυτές τμήματα ανάλογα.
Δηλαδή με βάση το διπλανό σχήμα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{AB}{\Delta E}=\frac{B\Gamma}{EZ}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$

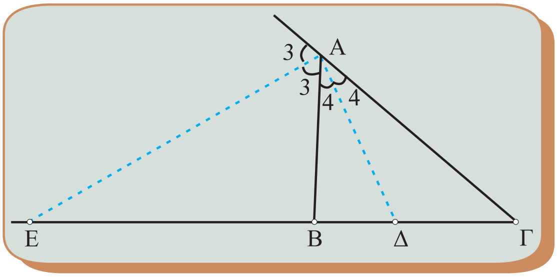
Θεώρημα του Θαλή σε τρίγωνο



Αν μια ευθεία είναι παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου, τότε διαιρεί τις δύο άλλες πλευρές εσωτερικά ή εξωτερικά στον ίδιο λόγο και αντιστρόφως.

Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου

Η εσωτερική διχοτόμος γωνίας τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Δηλαδή, στο διπλανό σχήμα για τη διχοτόμο ΑΔ ισχύει: $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$



Θεώρημα εξωτερικής διχοτόμου

Αν η εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου τέμνει το φορέα της απέναντι πλευράς, τότε χωρίζει εξωτερικά αυτή την πλευρά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών. Για παράδειγμα, στο παραπάνω σχήμα για τη διχοτόμο AE ισχύει: $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{BE}{\Gamma E}$

Παρατήρηση

Επειδή $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{BE}{\Gamma E}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$ τα σημεία Δ και Ε είναι αρμονικά συζυγή των Β και Γ.

Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων στα οποία οι διχοτόμοι διαιρούν την απέναντι πλευρά.

$\Delta B=\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$ $\Delta\Gamma=\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$ $EB=\frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}$ $E\Gamma=\frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma},\ (\beta>\gamma)$

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Βλέπε "αναλυτική" μέθοδος στη σελίδα 16

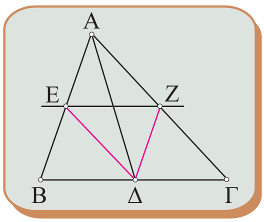
Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ διάμεσος αυτού και ΔΕ, ΔΖ οι διχοτόμοι των γωνιών ΑΔΒ και ΑΔΓ (Ε, Ζ πάνω στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα). Να αποδείξετε ότι ΕΖ//ΒΓ.

Λύση

Από το θεώρημα διχοτόμων στο τρίγωνο ΑΒΔ (ΔΕ διχοτόμος) έχουμε: $\frac{EA}{EB}=\frac{\Delta A}{\Delta B}$

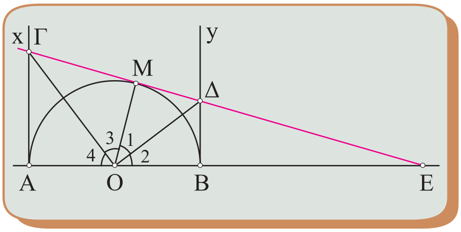


Από το θεώρημα διχοτόμων στο τρίγωνο ΑΔΓ (ΔΖ διχοτόμος) έχουμε: $\frac{ZA}{Z\Gamma}=\frac{\Delta A}{\Delta\Gamma}$

Επειδή ΔΒ = ΔΓ θα είναι $\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{\Delta A}{\Delta\Gamma}$ οπότε $\frac{EA}{EB}=\frac{ZA}{Z\Gamma}$ που σημαίνει ΕΖ//ΒΓ.

Άσκηση 2

Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ και οι εφαπτόμενες Αx και Βy προς το ίδιο μέρος της διαμέτρου. Φέρουμε εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο Μ του ημικυκλίου που τέμνει την Αx στο Γ, την Βy στο Δ και την προέκταση της ΑΒ στο Ε. Να αποδείξετε ότι: $\frac{ΓΜ}{ΔΜ}=\frac{ΕΓ}{ΕΔ}$



Λύση

Στο τρίγωνο ΟΜΕ είναι $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$ (διότι $O\overset{\Delta}{M}Δ=O\overset{\Delta}{Δ}B$) δηλαδή η ΟΔ είναι η εσωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΟΜΕ. Άρα: $\frac{ΔΜ}{ΔΕ}=\frac{ΟΜ}{ΟΕ}$ (1)

Επειδή $\widehat{O_3}=\widehat{O_4}$ (διότι $O\overset{\Delta}{A}Γ=O\overset{\Delta}{M}Γ$) η ΟΓ είναι εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΟΜΕ. Άρα: $\frac{ΓΜ}{ΓΕ}=\frac{ΟΜ}{ΟΕ}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\frac{ΔΜ}{ΔΕ}=\frac{ΓΜ}{ΓΕ}$ ή $\frac{ΓΕ}{ΔΕ}=\frac{ΓΜ}{ΔΜ}$

Τα σημεία Γ, Δ, Μ, Ε αποτελούν αρμονική τετράδα.

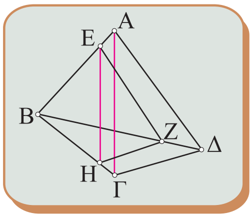
Άσκηση 3

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ επί των ΑΒ και ΒΔ. Φέρουμε ΕΖ//ΑΔ και ΖΗ//ΓΔ. Να αποδείξετε ότι ΕΗ// ΑΓ.

Λύση

Είναι: $ΕΖ//ΑΔ \Leftrightarrow \frac{ΒΕ}{ΕΑ}=\frac{ΒΖ}{ΖΔ}$ Είναι: $ΖΗ//ΓΔ \Leftrightarrow \frac{ΒΗ}{ΗΓ}=\frac{ΒΖ}{ΖΔ}$

Από τις παραπάνω σχέσεις αυτές έχουμε: $\frac{ΒΕ}{ΕΑ}=\frac{ΒΗ}{ΗΓ}$ οπότε ΕΗ//ΑΓ.



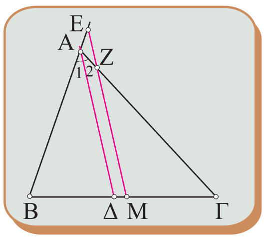
Άσκηση 4

Από το μέσο Μ πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τη διχοτόμο της γωνίας Α που τέμνει την ΒΑ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.

Λύση

Επειδή: $ΑΔ//ΜΕ \Leftrightarrow \frac{ΒΕ}{ΑΕ}=\frac{ΒΜ}{ΔΜ}$ (1)

και $\frac{ΓΖ}{ΑΖ}=\frac{ΓΜ}{ΔΜ}$ ή $\frac{ΓΖ}{ΑΖ}=\frac{ΒΜ}{ΔΜ}$ (2)



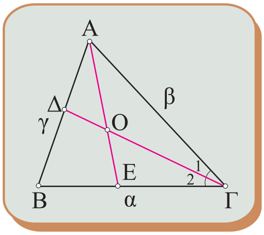
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\frac{ΒΕ}{ΑΕ} = \frac{ΓΖ}{ΑΖ}$ (3)

Επειδή είναι $\widehat{Α_1} = \widehat{Α_2}$ (ΑΔ: διχοτόμος $\widehat{Α}$) και $\widehat{Α_1} = \widehat{Ε_1}$, $\widehat{Α_2} = \widehat{Ζ_1}$ (ΑΔ//ΕΖ) έχουμε ότι $\widehat{Ζ_1} = \widehat{Ε_1}$ δηλαδή $ΑΖ = ΑΕ$. Η σχέση (3) επειδή $ΑΖ = ΑΕ$ γίνεται $ΒΕ = ΓΖ$.

Άσκηση 5

Αν Ο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων τριγώνου ΑΒΓ και ΓΔ η διχοτόμος της γωνίας Γ, να αποδείξετε ότι: $\frac{ΟΔ}{ΟΓ} = \frac{γ}{α+β}$

Λύση



Στο τρίγωνο ΑΔΓ από το θεώρημα διχοτόμων έχουμε:

$$\frac{ΟΔ}{ΟΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} \qquad (1)$$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, από το θεώρημα διχοτόμων, έχουμε:

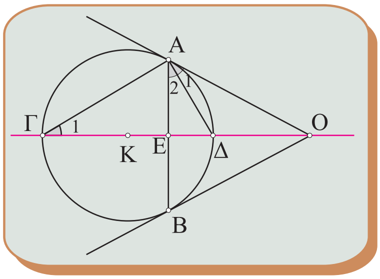
$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{β}{α} \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{ΔΒ+ΑΔ} = \frac{β}{α+β} \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{γ} = \frac{β}{α+β}$$

Οπότε $ΑΔ = \frac{βγ}{α+β}$. Με αντικατάσταση στην (1), έχουμε: $\frac{ΟΔ}{ΟΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \frac{\frac{βγ}{α+β}}{β} = \frac{γ}{α+β}$

Άσκηση 6

Από σημείο Ο εκτός κύκλου (Κ,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΟΑ και ΟΒ και τη διάμετρο ΓΔ. Αν η ΑΒ τέμνει την ΓΔ στο Ε να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ είναι αρμονικά συζυγή των Ο και Ε.

Λύση

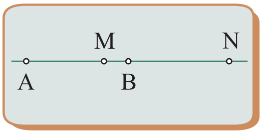


Είναι $\widehat{Α_1} = \widehat{Γ_1}$ (Η υπό χορδής και εφαπτομένης γωνία, είναι ίση με την εγγεγραμμένη, που αντιστοιχεί στο τόξο της χορδής) και $\widehat{Α_2} = \widehat{Γ_1}$ (εγγεγραμμένες στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{ΑΔ}$, $\overset{\frown}{ΔΒ}$).

Άρα $\widehat{Α_2} = \widehat{Α_1} = \widehat{Γ_1}$, οπότε η ΑΔ είναι διχοτόμος στο τρίγωνο ΕΑΟ. Επειδή η $ΑΓ \perp ΑΔ$ ($\widehat{ΓΑΔ} = 1$, αντιστοιχεί σε ημικύκλιο), η ΑΓ είναι εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΕΟ. Άρα τα σημεία Γ και Δ είναι αρμονικά συζυγή των Ε και Ο.

Άσκηση 7

Στην αρμονική σημειοσειρά (Α, Β, Μ, Ν), αν τα σημεία Ο και Ο΄ είναι μέσα των ΑΒ, ΜΝ τότε να δείξετε ότι:



$$4(OO')^2 = (AB)^2 + (MN)^2$$

Λύση

Είναι: $OM = OO' - O'M$ και $ON = OO' + O'N = OO' + O'M$.

Άρα $(OM)(ON) = (OO' - O'M)(OO' + O'M)$ ή $(OM)(ON) = (OO')^2 - (O'M)^2$.

Κατά την ιδιότητα (4) έχουμε: $(OA)^2 = (OM)(ON)$

Άρα: $(OA)^2 = (OO')^2 - (O'M)^2$ ή

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = (OO')^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4(OO')^2 = (AB)^2 + (MN)^2$$

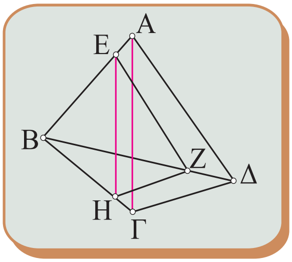
Άσκηση 8

Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι ΒΔ και ΓΕ είναι διχοτόμοι και ισχύει:

$$BE = \Gamma\Delta.$$

Να δείξετε ότι: **α.** $EK \cdot KB = \Delta K \cdot K\Gamma$ **β.** $AB = A\Gamma$

όπου Κ το έγκεντρο του τριγώνου.



Λύση

α. Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{\Delta K}{KB} = \frac{KE}{K\Gamma}$. Στο τρίγωνο ΒΓΔ η ΓΚ είναι διχοτόμος, άρα $\frac{K\Delta}{KB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma B}$ (1). Στο τρίγωνο ΒΕΓ η ΒΚ είναι διχοτόμος, είναι $\frac{KE}{K\Gamma} = \frac{BE}{B\Gamma}$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) και επειδή $BE = \Gamma\Delta$. Έχουμε $\frac{K\Delta}{KB} = \frac{KE}{K\Gamma}$ (3)

β. Από τη σχέση (3) έχουμε ότι ΕΔ//ΒΓ. Άρα $\frac{AB}{EB} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow AB = A\Gamma$ (διότι $EB = \Gamma\Delta$)

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ και Ε το μέσο αυτής. Η ΒΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι: $\frac{AZ}{Z\Gamma} = \frac{1}{2}$

2. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Αν οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνονται στο Ο και είναι ΑΒ//ΔΕ και ΑΓ//ΔΖ, να δείξετε ότι ΒΓ//ΕΖ.

3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, (ΑΒ//ΓΔ), με $ΑΔ = 6λ$ και $ΒΓ = 4λ$. Πάνω στις ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε $ΑΕ = \frac{3λ}{2}$ και $ΒΖ = λ$. Να δείξετε ότι $ΕΖ // ΑΒ // ΓΔ$

4. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η παράλληλη προς τη ΒΓ από το Α τέμνει τη ΒΔ στο Ε και η παράλληλη προς τη ΔΓ από το Ε τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι ΒΖ//ΑΔ.

5. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών Α και Δ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνουν τις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ, να δείξετε ότι ΕΖ//ΒΓ.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΑΔ αυτού. Αν ΔΕ//ΑΒ (Ε σημείο της ΑΓ), να δείξετε ότι: $\frac{1}{β} + \frac{1}{γ} = \frac{1}{ΔΕ}$

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 1$) και η διάμεσος ΑΟ αυτού. Αν ΑΔ και ΑΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{ΒΑΜ}$ και $\widehat{ΜΑΓ}$, να δείξετε ότι: $\left(\frac{ΒΔ}{ΔΜ}\right)^2 + \left(\frac{ΓΕ}{ΕΜ}\right)^2 = 4$

Ε "ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ"

Τα τρίγωνα ΑΒΡ και ΑΒΣ βρίσκονται σε αντίθετα μέρη της ΑΒ. Τα σημεία Κ, Λ, Μ βρίσκονται πάνω στις ΑΒ, ΑΡ και ΑΣ έτσι ώστε ΚΛ//ΒΡ, ΚΜ//ΒΣ.

Δείξτε ότι: **i.** $\frac{ΑΛ}{ΛΡ} = \frac{ΑΜ}{ΜΣ}$ **ii.** $ΛΜ // ΡΣ$

Μάθημα 3

Ομοιότητα

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Όμοια λέγονται δύο πολύγωνα που έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Λόγος ομοιότητας δύο όμοιων πολυγώνων λέγεται ο λόγος δύο πλευρών που είναι απέναντι από αντίστοιχα ίσες γωνίες.

Ισχύουν οι επόμενες προτάσεις:

- Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια προς τρίτο τότε είναι και μεταξύ τους όμοια.
- Δύο ίσα πολύγωνα είναι πάντα όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = 1$.
- Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια τότε όλα τα αντίστοιχα δευτερεύοντα στοιχεία τους έχουν λόγο ίσο με το λόγο ομοιότητας τους.
- Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια μεταξύ τους.
- Δύο τετράγωνα είναι πάντα όμοια μεταξύ τους.

Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων

Κριτήριο 1^0: Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Κριτήριο 2^0: Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες των ανάλογων πλευρών γωνίες τους ίσες.

Κριτήριο 3^0: Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

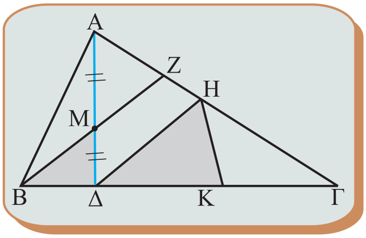
Ασκήσεις που ζητείται να υπολογίσουμε κάποιο λόγο τμημάτων.
Ο λόγος αυτός παρουσιάζεται σε αναλογία που προκύπτει από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή ή κάποιου θεωρήματος των διχοτόμων ή ακόμα από την ομοιότητα πολυγώνων (συνήθως τριγώνων) ανάλογα με τα δεδομένα της άσκησης.

Παράδειγμα 1

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ονομάζουμε Μ το μέσον της διχοτόμου ΑΔ. Φέρνουμε τη ΒΜ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ και τη ΔΗ//ΒΖ. Από το Η φέρνουμε ΗΚ//ΑΔ. Αν $B\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$ να υπολογίσετε τους λόγους: **α.** $\frac{Z\Gamma}{AZ}$ **β.** $\frac{AB}{A\Gamma}$

Λύση

α. Στο τρίγωνο ΑΔΗ είναι ΜΖ//ΔΗ και αφού Μ μέσον της ΑΔ τότε $AZ = ZH$ (1) και



$MZ // = \frac{\Delta H}{2}$ (2). Αφού ΒΖ//ΔΗ από θεώρημα Θαλή στο ΒΖΓ ισχύει:

$$\frac{Z\Gamma}{ZH} = \frac{B\Gamma}{B\Delta} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{Z\Gamma}{AZ} = \frac{B\Gamma}{\frac{B\Gamma}{4}} \Leftrightarrow \frac{Z\Gamma}{AZ} = 4$$

β. Αφού ΑΔ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$ από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου ισχύει:

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\frac{B\Gamma}{4}}{\frac{3B\Gamma}{4}} = \frac{1}{3}$$

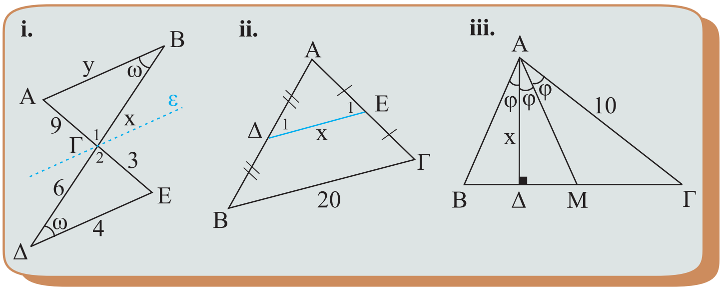
Κατηγορία - Μέθοδος 2

Ασκήσεις που ζητείται να υπολογίσετε ευθύγραμμο τμήμα όταν δίνονται άλλα γνωστά ευθύγραμμα τμήματα.

Το ευθύγραμμο τμήμα υπολογίζεται από αναλογία στην οποία οι υπόλοιποι όροι είναι γνωστοί και η οποία προκύπτει από:
- Εφαρμογή θεωρήματος Θαλή
- Ομοιότητα τριγώνων (γενικότερα πολυγώνων)
- Εφαρμογή των θεωρημάτων των διχοτόμων

Παράδειγμα 2

Στα πιο κάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x,y.



Λύση

α. Αφού $\hat{B}=\hat{\Delta}$ είναι ΑΒ//ΔΕ οπότε από θεώρημα Θαλή (θεωρώντας τη νοητή ευθεία ε//ΔΕ//ΑΒ) έχουμε $\frac{6}{3}=\frac{x}{9}\Leftrightarrow x=18$. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ είναι όμοια διότι $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ και $\hat{B}=\hat{\Delta}$ άρα και $\hat{A}=\hat{E}$. Επομένως, $\frac{y}{4}=\frac{9}{3}\Leftrightarrow y=12$.

β. Αφού τα Δ,Ε είναι μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ είναι ΔΕ//ΒΓ. Άρα $\hat{\Delta}_1=\hat{B}$ και $\hat{E}_1=\hat{\Gamma}$. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ είναι όμοια και επομένως:

$$\frac{20}{x}=\frac{AB}{A\Delta}\Leftrightarrow\frac{20}{x}=\frac{AB}{\frac{AB}{2}}\Leftrightarrow\frac{20}{x}=2\Leftrightarrow x=10$$

γ. Στο τρίγωνο ΑΒΜ η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος άρα είναι και διάμεσος, οπότε

$$B\Delta=\Delta M=\frac{BM}{2}=\frac{B\Gamma}{4}.$$

Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο ΑΔΓ έχουμε:

$$\frac{A\Gamma}{A\Delta}=\frac{M\Gamma}{M\Delta}\Leftrightarrow\frac{10}{x}=\frac{\frac{B\Gamma}{2}}{\frac{B\Gamma}{4}}\Leftrightarrow x=5$$

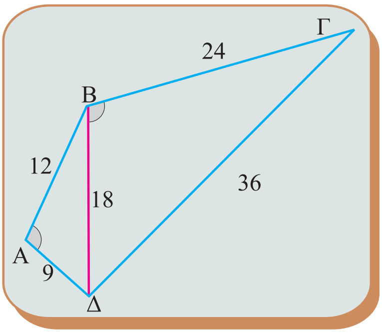
Κατηγορία - Μέθοδος 3

Ασκήσεις όπου είναι γνωστές οι πλευρές τριγώνου και ζητείται ισότητα γωνιών.

Αποδεικνύουμε την ομοιότητα τριγώνων (από αναλογίες πλευρών) και βρίσκουμε τις αντίστοιχες ίσες γωνίες.

Παράδειγμα 3

Στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι $\hat{A}=\Delta\hat{B}\Gamma$.



Λύση

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΓ είναι όμοια αφού

$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A\Delta}{B\Delta}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{1}{2}.$$

Άρα οι αντίστοιχες γωνίες είναι ίσες άρα $\hat{A}=\Delta\hat{B}\Gamma$.

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Ασκήσεις που ζητείται να δείξουμε αναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ (1) ή ισότητα γινομένου $\alpha\delta=\beta\gamma$ (2) ή ακόμα σχέση της μορφής $\alpha^2=\beta\gamma$ (3). (όπου α, β, γ μέτρα ευθυγράμμων τμημάτων)
Και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε να δείξουμε ότι ισχύει μια αναλογία. Στις περιπτώσεις (2), (3) αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$ αντίστοιχα. Η αναλογία προκύπτει από:

- Εφαρμογή του θεωρήματος Θαλή
- Ομοιότητα τριγώνων (γενικότερα πολυγώνων)
- Εφαρμογή των θεωρημάτων των διχοτόμων (εσωτερικής, εξωτερικής)

Πολλές φορές η ισότητα λόγων προκύπτει μεταβατικά (αν οι λόγοι είναι ίσοι με τρίτο λόγο είναι και μεταξύ τους ίσοι)
Σε πολλές ασκήσεις προκειμένου να φτάσουμε στη ζητούμενη προς απόδειξη αναλογία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των αναλογιών ή ακόμα να προσθέσουμε - αφαιρέσουμε - πολλαπλασιάσουμε - διαιρέσουμε αναλογίες μεταξύ τους.

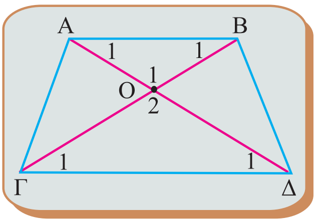
Παράδειγμα 4

Να δείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο το σημείο τομής των διαγωνίων του διαιρεί κάθε διαγώνιο σε τμήματα ανάλογα με τις βάσεις.

Λύση

Τα τρίγωνα ΒΟΑ και ΓΟΔ είναι όμοια, διότι:

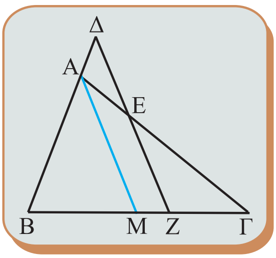
- $\hat{\Gamma}_1=\hat{B}_1$ (ως εντός εναλλάξ)
- $\hat{\Delta}_1=\hat{A}_1$ (ως εντός εναλλάξ) και
- $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ (ως κατακορυφήν γωνίες)



Άρα $\frac{O\Gamma}{OB}=\frac{O\Delta}{OA}$.

Παράδειγμα 5

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΜ είναι διάμεσος και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΜ. Να δείξετε ότι $A\Delta\cdot\beta=\gamma\cdot AE$



Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{A\Delta}{\gamma}=\frac{AE}{\beta}$. Στο τρίγωνο ΒΔΖ, έχουμε:

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{MZ}{BM} \quad (1)$$

Επίσης στο τρίγωνο ΑΜΓ έχουμε:

$$\frac{ΑΕ}{ΓΕ}=\frac{ΜΖ}{ΖΓ} \Leftrightarrow \frac{ΑΕ}{ΓΕ+ΕΑ}=\frac{ΜΖ}{ΓΖ+ΖΜ} \Leftrightarrow \frac{ΑΕ}{β}=\frac{ΜΖ}{ΓΜ} \qquad (2)$$

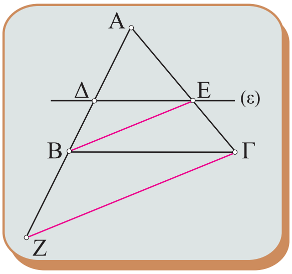
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\frac{ΑΔ}{γ}=\frac{ΑΕ}{β}$, διότι $ΜΒ=ΜΓ$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Ευθεία ε είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε. Από το Γ φέρνουμε παράλληλη στη ΒΕ που τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Ζ, να δείξετε ότι: $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΒ}{ΑΖ}$

Λύση



Από τις $ΔΕ // ΒΓ \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ (1)

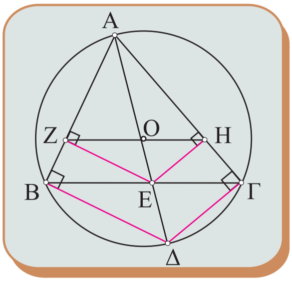
Από τις $ΒΕ // ΓΖ \Leftrightarrow \frac{ΑΒ}{ΑΖ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) είναι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$

Άσκηση 2

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν η διάμετρος ΑΔ τέμνει τη ΒΓ στο Ε και φέρουμε τις $ΕΖ \perp ΑΒ$ και $ΕΗ \perp ΑΓ$, να δείξετε ότι: $ΖΗ // ΒΓ$

Λύση



Είναι: $\widehat{ΑΒΔ}=\widehat{ΑΖΕ}=1^{L}$. Άρα $ΕΖ // ΔΒ \Leftrightarrow \frac{ΑΖ}{ΖΒ}=\frac{ΑΕ}{ΕΔ}$ (1)

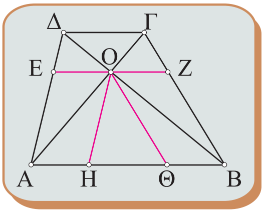
Όμοια: $\widehat{ΑΓΔ}=\widehat{ΑΗΕ}=1^{L}$. Άρα $ΕΗ // ΔΓ \Leftrightarrow \frac{ΑΗ}{ΗΓ}=\frac{ΑΕ}{ΕΔ}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\frac{ΑΖ}{ΖΒ}=\frac{ΑΗ}{ΗΓ}$, οπότε $ΖΗ // ΒΓ$.

Άσκηση 3

Από το σημείο τομής των διαγωνίων τραπεζίου, φέρνουμε την ΕΖ//ΑΒ (Ε, Ζ σημεία των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα) και ΟΗ//ΑΔ, ΟΘ//ΒΓ (Η, Θ σημεία της ΑΒ).
Να δείξετε ότι: ΟΕ = ΟΖ

Λύση



Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΟΘ//ΒΓ οπότε: $\frac{AO}{O\Gamma}=\frac{A\Theta}{\Theta B}$ (1)

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι ΟΗ//ΑΔ οπότε: $\frac{BO}{O\Delta}=\frac{BH}{AH}$ (2)

Επειδή ΔΓ//ΕΖ//ΑΒ θα είναι: $\frac{AO}{O\Gamma}=\frac{BO}{O\Delta}$. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$\frac{A\Theta}{B\Theta}=\frac{BH}{AH}$ ή $\frac{A\Theta+\Theta B}{\Theta B}=\frac{BH+AH}{AH}$ ή $\frac{AB}{\Theta B}=\frac{AB}{AH}\Leftrightarrow AH=\Theta B\Leftrightarrow EO=OZ$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ και ονομάζουμε Ε το μέσο της. Αν η ΒΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ να δειχθεί ότι: $\frac{AZ}{Z\Gamma}=\frac{1}{2}$

2. Στη πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε το μέσο Μ και τα σημεία Δ, Ε έτσι ώστε $\Delta M = ME$. Φέρνουμε τις ΔΖ//ΑΓ $(Z\in AB)$ και ΕΗ//ΑΒ $(H\in A\Gamma)$. Να δείξετε ότι: ΖΗ//ΒΓ.

3. Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ , η παράλληλη προς τη ΒΓ από το Α τέμνει την ΒΔ στο Ε και η παράλληλη προς τη ΔΓ από το Ε τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι: ΒΖ // ΑΔ

4. Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ και $A'Z\perp\Gamma\Gamma'$, $A'E\perp A\Gamma$.Να δείξετε ότι: ΒΖ//ΑΔ

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΑΔ αυτού. Αν ΔΕ//ΑΒ $(E\in A\Gamma)$, να δείξετε ότι: $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\Delta E}$

6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις ΒΕ και ΓΖ κάθετες στη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας Α. Να δείξετε ότι τα Ε και Ζ είναι αρμονικά συζυγή των Α, Δ.

7. Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Μία χορδή ΑΕ τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Να δείξετε ότι: $AB^2 = A\Delta\cdot AE$

8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A}=1)$ είναι ΑΔ το ύψος και $ΔΕ \perp ΑΒ$. Να δείξετε ότι: $ΑΔ^2 = ΑΓ \cdot ΔΕ$

9. Σε ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται κάθετα στο Ο. Να δείξετε ότι: $ΑΔ^2 = ΑΒ \cdot ΓΔ$

10. Ο κύκλος που γράφεται με διάμετρο τη πλευρά ΒΓ ορθογωνίου τραπεζίου ΑΒΓΔ $(\widehat{A}=\widehat{Δ}=1)$ τέμνει την ΑΔ στο Ε, να δείξετε ότι: $ΑΕ \cdot ΕΔ = ΑΒ \cdot ΓΔ$

11. Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον κύκλο στο Ε. Να δείξετε ότι: **α.** $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ \cdot ΑΕ$ **β.** $ΕΒ^2 = ΕΔ$

12. Από σημείο Ο που βρίσκεται εκτός κύκλου (Κ, R) φέρνουμε την εφαπτομένη ΟΑ και τη τέμνουσα ΟΒΓ. Να δείξετε ότι: $\dfrac{(ΑΒ)^2}{(ΑΓ)^2} = \dfrac{ΟΒ}{ΟΓ}$

13. Από την κορυφή παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε την ευθεία ε που τεμνει τη ΒΓ στο Ε και τη ΔΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι: $(ΒΕ)\cdot(ΔΖ) = (ΑΒ)\cdot(ΑΔ)$

14. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{B} - \widehat{Γ} = 1^{L}$. Αν ΑΔ το ύψος του να δείξετε ότι: $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$

15. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και ευθεία xy. Η διάμετρος ΑΒ τέμνει κάθετα τη xy στο Γ. Από το Α φέρνουμε τυχαία χορδή ΑΔ, που τέμνει τη xy στο Ε. Να δείξετε ότι: $(ΑΔ)\cdot(ΑΕ) = (ΑΒ)\cdot(ΑΓ)$

16. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ και Ο είναι το σημείο που τέμνονται οι μη παράλληλες πλευρές του. Από το Ο φέρνουμε την ευθεία ε παράλληλη στις βάσεις του τραπεζίου, που τέμνει τις προεκτάσεις των διαγωνίων του τραπεζίου στα Ε και Ζ. Να δείξετε ότι: $ΕΟ = ΟΖ$

17. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τυχαία ευθεία ε, που τέμνει την ΑΓ στο Κ, την ΑΒ στο Ρ και την από το Α παράλληλη προς τη ΒΓ στο Ν. Να δειχθεί ότι: $ΡΝ/ΡΜ = ΚΝ/ΚΜ$

18. Από το άκρο Α μιας διαμέτρου ΑΒ κύκλου Ο φέρνουμε δύο χορδές ΑΓ και ΑΔ, που τέμνουν την εφαπτομένη ΒΕ στα Ε και Ζ. Να δείξετε ότι: $(ΑΕ)\cdot(ΑΓ) = (ΑΖ)\cdot(ΑΔ)$

19. Δίνεται κύκλος (Ο, R), χορδή ΑΒ και οι εφαπτομένες $ε_1$ και $ε_2$ στα Α και Β. Αν Μ τυχαίο σημείο του ΑΒ και ΜΗ, ΜΕ, ΜΖ οι αποστάσεις του Μ από την $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και τις $ε_1$ και $ε_2$, να δείξετε ότι: $ΜΗ^2 = ΜΕ \cdot ΜΖ$

20. Από σημείο Σ εκτός κύκλου (Ο, R) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ και ΣΒ και μία τέμνουσα ΣΓΔ. Να δείξετε ότι: $ΑΓ \cdot ΒΔ = ΑΔ \cdot ΒΓ$

21. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και από το Α μία τέμνουσα τη ΒΓ στο Ζ, τη ΓΔ στο Η και τη ΒΔ στο Ε. Να δείξετε ότι: $(ΕΑ)^2 = (ΕΖ)(ΕΗ)$

22. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι: $ΔΒ \cdot ΔΓ = ΔΕ \cdot ΔΖ$

23. Αν οι διαγώνιες δύο παραλληλογράμμων είναι ανάλογες και σχηματίζουν ίσες γωνίες, τα παραλληλόγραμμα είναι όμοια.

24. Δύο κύκλοι Κ και Λ τέμνονται στα Α και Β. Οι εφαπτομένες των κύκλων στο Α, τους τέμνουν στα Γ και Δ. Να δειχθεί ότι: $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$

25. Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρνουμε τη διάμετρο ΑΔ και το ύψος ΑΕ, να δείξετε ότι: $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ \cdot ΑΕ$

26. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΟ το ύψος του. Αν Μ τυχαίο σημείο του ύψους ΑΟ και $ΜΔ \perp ΑΒ$, $ΜΕ \perp ΑΓ$ να δείξετε ότι: $ΑΒ \cdot ΑΔ = ΑΕ \cdot ΑΓ$

27. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις ΑΒ και ΑΓ κατά τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Η ΔΕ τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι: $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΕΖ}{ΔΖ}$

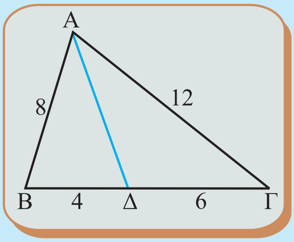
28. Από τις κορυφές Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τις ευθείες $ε_1//ε_2//Αx$ (Αx τυχαία ημιευθεία). Αν η Αx τέμνει την ΒΓ στο σημείο Δ και οι $ε_1$, $ε_2$ τις προεκτάσεις των ΑΓ, ΑΒ στα Ε, Ζ αντίστοιχα, ν'αποδειχθεί ότι: $\frac{ΑΔ}{ΒΕ} + \frac{ΑΔ}{ΓΖ} = 1$

29. Με διαμέτρους τις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ γράφουμε κύκλους που τέμνουν μια ευθεία xΑy στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα. Να δείξετε ότι: τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΝΑΓ είναι όμοια.

30. Σε κύκλο (Ο, R) φέρνουμε τις κάθετες διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ. Αν Κ το μέσον της ΟΔ και η ΑΚ τέμνει τον κύκλο στο Ε να δειχθεί ότι: α. ΑΕ = 2ΒΕ και β. ΓΕ = 3ΔΕ

31. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρνουμε το ύψος ΓΕ. Να δείξετε ότι: $α^2 = 2γ \cdot ΒΕ$

32. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:



i. Αν $AM=\frac{2}{3}MB$ τότε:

α. $\frac{AM}{AB}=\frac{3}{5}$ **β.** $\frac{BM}{AM}=\frac{3}{2}$ **γ.** $\frac{MB}{AB}=\frac{5}{2}$

ii. Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α

iii. Το θεώρημα της εσωτερικής και της εξωτερικής διχοτόμου ισχύει και για ισοσκελές τρίγωνο.

33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ διάμεσος αυτού. Αν ΜΔ είναι διχοτόμος της $B\hat{M}A$ και ΜΕ διχοτόμος της $A\hat{M}\Gamma$ να δείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.

(**Υπ:** Χρησιμοποιήστε το θεώρημα των διχοτόμων στα τρίγωνα ΑΜΓ και ΑΜΒ και το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή για να δείξετε την παραλληλία)

34. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ $(AB\neq A\Gamma)$, Ι το έγκεντρο αυτού, Θ το κέντρο βάρους του και ΑΔ διχοτόμος της γωνίας Α.

α. Να βρείτε το λόγο $\frac{AI}{I\Delta}$ συναρτήσει των πλευρών του.

β. Αν $\beta+\gamma=2\alpha$ να δείξετε ότι ΙΘ//ΒΓ.

(**Υπ:α.** Στο τρίγωνο ΑΒΔ, η ΒΙ είναι διχοτόμος άρα $\frac{AI}{AB}=\frac{I\Delta}{B\Delta}$ και $B\Delta=\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$.

β. Χρησιμοποιείστε τον προηγούμενο λόγο και την ιδιότητα του βαρύκεντρου)

35. Δίνεται τρίγωνο με πλευρές $AB=4$, $A\Gamma=6$ και $B\Gamma=9$. Επί της ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\hat{B}\Delta=A\hat{\Gamma}B$. Να βρείτε τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΔ.

(**Υπ:** Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια $A\Delta=\frac{8}{3}$, $B\Delta=6$, $AB=4$)

36. Μια ευθεία διέρχεται από το μέσον της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\frac{AE}{AZ}=\frac{BE}{\Gamma Z}$

(**Υπ:** Θεωρούμε ΑΘ//ΒΓ)

Ε "ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ"

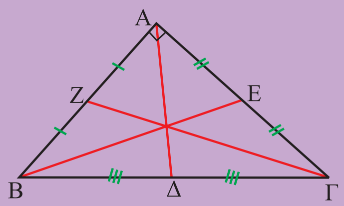
Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ το άθροισμα των βάσεων ΑΒ + ΓΔ είναι ίσα με το άθροισμα ΑΔ + ΒΓ των μη παράλληλων πλευρών του. Από το σημείο τομής των διαγωνίων του φέρνουμε παράλληλη προς τις βάσεις που τέμνει την ΑΔ στο Μ και τη ΒΓ στο Ν. Να δειχθεί ότι:

ΔΜ + ΓΝ = ΔΓ

2ο Κεφάλαιο

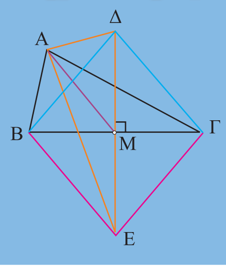
4ο μάθημα

Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνια τρίγωνα



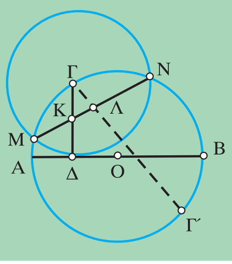
5ο μάθημα

Μετρικές σχέσεις σε τυχαίο τρίγωνο



6ο μάθημα

Μετρικές σχέσεις σε κύκλο



Μάθημα 4

Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνια τρίγωνα

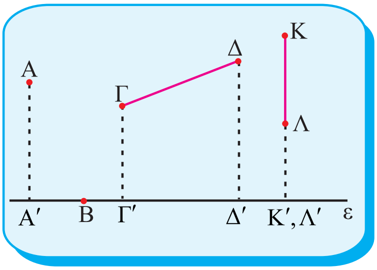
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Μετρικές σχέσεις

Μετρικές σχέσεις ονομάζουμε τις σχέσεις μεταξύ των μέτρων των στοιχείων τριγώνων είτε αυτά είναι κύρια στοιχεία (πλευρές, γωνίες), είτε είναι δευτερεύοντα (ύψη, διχοτόμοι, διάμεσοι).

Προβολή σημείου σε ευθεία

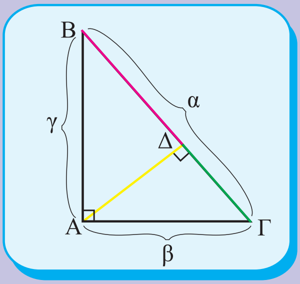
Δίνεται ευθεία ε και σημείο Α που δεν ανήκει σ' αυτήν. **Ορθή προβολή** ή απλά **προβολή** του σημείου Α στην ε λέγεται το ίχνος Α΄, της καθέτου που άγεται απο το Α προς την ε. Αν κάποιο σημείο, όπως το Β, ανήκει στην ευθεία ε, η προβολή του Β είναι το ίδιο Β.



Προβολή ευθύγραμμου τμήματος σε ευθεία

Προβολή ενός τμήματος ΓΔ πάνω στην ευθεία ε λέμε το τμήμα Γ΄Δ΄ που έχει άκρα τις προβολές Γ΄ και Δ΄ των άκρων Γ και Δ του τμήματος ΓΔ. Αν ο φορέας ενός τμήματος ΚΛ είναι κάθετος στην ε τότε οι προβολές των Κ και Λ συμπίπτουν. Έτσι η προβολή του τμήματος ΚΛ είναι ένα σημείο, δηλαδή έχει μέτρο 0.

Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνια τρίγωνα.



ΒΓ υποτείνουσα
ΑΔ ύψος
ΓΔ προβολή του ΑΓ στην υποτείνουσα
ΒΔ προβολή του ΑΒ στην υποτείνουσα

Θεώρημα Ι Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.	$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ $(\gamma^2 = \alpha \cdot B\Delta)$ $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$ $(\beta^2 = \alpha \cdot \Gamma\Delta)$
Πόρισμα Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους επάνω στην υποτείνουσα.	$\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}$
Θεώρημα ΙΙ (Πυθαγόρειο Θεώρημα) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας	$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ ή $\gamma^2 + \beta^2 = \alpha^2$
Θεώρημα ΙΙΙ (Αντίστροφο του Πυθαγορείου) Αν σε κάποιο τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την μεγαλύτερη πλευρά.	Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ, η $\alpha = B\Gamma$ είναι η μεγαλύτερη πλευρά και $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A} = 90^0$
Θεώρημα IV Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.	$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta$
Βασικές Εφαρμογές Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο αν υ_α είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισχύει:	$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha^2}$ $\beta \cdot \gamma = \alpha\upsilon_\alpha$

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος

1. Ασκήσεις που ζητείται ο υπολογισμός ευθύγραμμων τμημάτων ή γωνιών ή ζητείται να αποδειχθεί κάποια μετρική σχέση μεταξύ πλευρών τριγώνου.
Εντοπίζουμε ορθογώνια τρίγωνα και γράφουμε τις κατάλληλες μετρικές σχέσεις σε κάθε περίπτωση προσπαθώντας να εμφανίσουμε τα τμήματα που εμπλέκονται στην αποδεικτέα σχέση.
Αν κάποιο απο τα εμφανιζόμενα τμήματα δεν υπάρχει στην αποδεικτέα σχέση το αντικαθιστούμε συναρτήσει τμημάτων που εμφανίζονται στην αποδεικτέα είτε χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Π.Θ.) είτε οποιαδήποτε άλλη γνωστή μετρική σχέση.

2. Ασκήσεις που ζητείται να δειχθεί ότι ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο
Εξετάζουμε αν για την μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ισχύει το αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.
Θυμίζουμε δύο βασικές προτάσεις που χρησιμοποιούμε συχνά σε ορθογώνιο τρίγωνο.

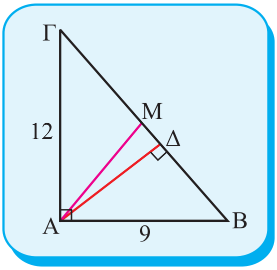
α. Η διάμεσος προς την υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

β. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η κάθετη πλευρά που βρίσκεται απέναντι απο γωνία 30° είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Παράδειγμα 1

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) έχουμε ΑΒ = 9 και ΑΓ = 12.
Να βρεθούν τα τμήματα ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ, ΑΔ και ΑΜ, όπου ΑΔ ύψος και ΑΜ διάμεσος.

Λύση



Απο το Π.Θ.στο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 9^2 + 12^2$$

Άρα $B\Gamma^2 = 225 \Leftrightarrow B\Gamma = 15$. Είναι $AM = \frac{1}{2}B\Gamma = \frac{1}{2}\cdot 15 = 7,5$

(Η διάμεσος είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας)

Ακόμα $A\Gamma^2 = B\Gamma\cdot\Gamma\Delta \Leftrightarrow 15\cdot\Gamma\Delta = 144 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 9,6$

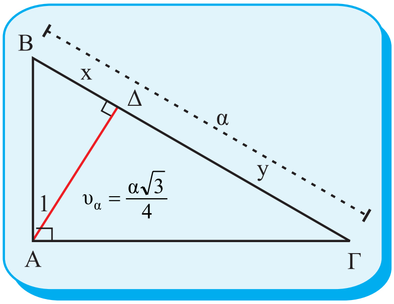
Υπολογίζουμε τη ΒΔ: $B\Delta = B\Gamma - \Gamma\Delta = 15 - 9,6 = 5,4$

Επίσης $A\Delta^2 = B\Delta\cdot\Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta^2 = 5,4\cdot 9,6 = 51,84$. Άρα $A\Delta = 7,2$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$. Αν $A\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$ το ύψος στην υποτείνουσα, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}, \hat{\Gamma}$.

Λύση



Έστω $ΔΒ = x$, $ΔΓ = y$ τότε $x + y = α$

και $x \cdot y = υ_α{}^2 = \left(\frac{α\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3α^2}{16}$.

Οπότε τα x, y είναι ρίζες της εξίσωσης

$ω^2 - α \cdot ω + \frac{3α^2}{16} = 0$.

Επειδή $Δ = α^2 - \frac{3α^2}{4} = \frac{α^2}{4}$ είναι: $ω_1 = \frac{α + \frac{α}{2}}{2} = \frac{3α}{4}$ και $ω_2 = \frac{α - \frac{α}{2}}{2} = \frac{α}{4}$.

Άρα $x = \frac{3α}{4}$ και $y = \frac{α}{4}$ ή $x = \frac{α}{4}$ και $y = \frac{3α}{4}$

Αν $x = \frac{3α}{4}$ τότε $AB^2 = AΔ^2 + ΔB^2 = \frac{3α^2}{16} + \frac{9α^2}{16} = \frac{12α^2}{16} = \frac{3α^2}{4}$

Άρα $AB = \frac{α\sqrt{3}}{2} = 2AΔ$. Τότε είναι $\hat{B} = 30^o$ απο γνωστό θεώρημα οπότε $\hat{Γ} = 60^o$

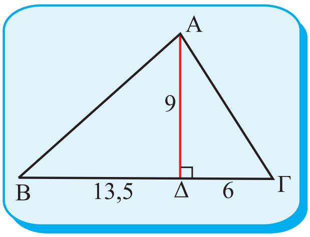
Αν $x = \frac{α}{4}$ τότε $AB = \frac{α}{2}$ οπότε απο το ίδιο θεώρημα $\hat{A}_1 = 30^o$.

Άρα $\hat{B} = 60^o$ και $\hat{Γ} = 30^o$

Παράδειγμα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος αυτού ΑΔ. Αν ΑΔ = 9, ΒΔ = 13,5 και ΓΔ = 6 να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Λύση



Έχουμε $AΓ^2 = AΔ^2 + ΓΔ^2 = 9^2 + 6^2 = 81 + 36 = 117$

Επίσης $AB^2 = AΔ^2 + BΔ^2 = 9^2 + 13{,}5^2 = 263{,}25$

Ακόμα έχουμε: $BΓ = BΔ + ΓΔ = 13{,}5 + 6 = 19{,}5$ άρα $BΓ^2 = 380{,}25$

Παρατηρούμε ότι $BΓ^2 > AB^2$ άρα $BΓ > AB$. Ομοια και $BΓ > AΓ$.

Επίσης $AB^2 + AΓ^2 = 263{,}25 + 117 = 380{,}25$

δηλαδή ισχύει: $AB^2 + AΓ^2 = BΓ^2$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΓ.

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε οτι η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου ισούται με τη διαφορά των τετραγώνων των αντίστοιχων προβολών τους στην τρίτη πλευρά.

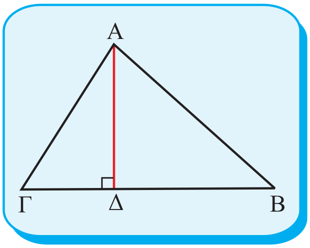
Λύση

Έστω οτι ΑΒ > ΑΓ. Τότε και ΒΔ > ΓΔ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο, οπότε: $AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ (1)

Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε $A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2$ (2)
Αφαιρούμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε:

$$AB^2 - A\Gamma^2 = (A\Delta^2 + B\Delta^2) - (A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2) = B\Delta^2 - \Gamma\Delta^2$$

που είναι το ζητούμενο αφου οι ΒΔ και ΓΔ είναι οι προβολές των ΑΒ και ΑΓ στην ΒΓ.



Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΓ με $\hat{O} = 90^o$ και Β, Δ τυχαία σημεία των ΟΑ και ΟΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $A\Gamma^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 + \Gamma B^2$.

Λύση

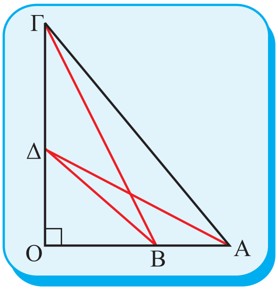
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΓ ισχύει $A\Gamma^2 = OA^2 + O\Gamma^2$ (1)

Όμοια, στο ορθογώνιο ΟΒΔ ισχύει $B\Delta^2 = O\Delta^2 + OB^2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$$A\Gamma^2 + B\Delta^2 = OA^2 + O\Gamma^2 + O\Delta^2 + OB^2 =$$
$$= (OA^2 + O\Delta^2) + (OB^2 + O\Gamma^2) = A\Delta^2 + B\Gamma^2$$

διότι τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ορθογώνια και ισχύει το Π.Θ.



Άσκηση 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$.Έστω Δ το μέσον της ΑΒ και Ε η προβολή του Δ πάνω στη ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $E\Gamma^2 - EB^2 = A\Gamma^2$.

Λύση

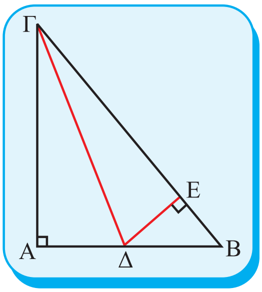
Στα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΕ, ΕΓΔ εφαρμόζουμε το Π.Θ. και έχουμε:

$$EB^2 = B\Delta^2 - \Delta E^2 \quad (1)$$
$$E\Gamma^2 = \Gamma\Delta^2 - \Delta E^2 \quad (2)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τη σχέση (1) από τη σχέση (2) και έχουμε

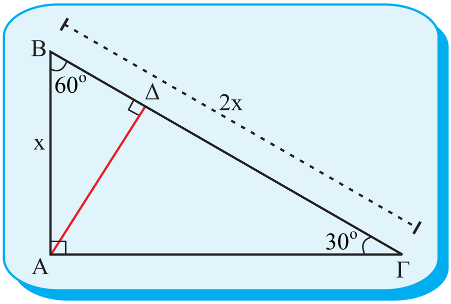
$$E\Gamma^2 - EB^2 = (\Gamma\Delta^2 - \Delta E^2) - (B\Delta^2 - \Delta E^2) = \Gamma\Delta^2 - B\Delta^2 = \Gamma\Delta^2 - A\Delta^2$$

αφού $A\Delta = B\Delta$. Άρα $E\Gamma^2 - EB^2 = \Gamma\Delta^2 - A\Delta^2 = A\Gamma^2$ διότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.



Άσκηση 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $AB = \frac{B\Gamma}{2}$. Να φέρετε το ύψος ΑΔ και να υπολογίσετε τα τμήματα ΑΓ και ΔΓ συναρτήσει της πλευράς ΑΒ.



Λύση

Έστω $BA = x$ τότε $B\Gamma = 2x$ οπότε από γνωστό θεώρημα $\hat{\Gamma} = 30^o$ άρα $\hat{B} = 60^o$

Ακόμα έχουμε: $A\Gamma^2 = (2x)^2 - x^2$ ή $A\Gamma^2 = 3x$ ή $A\Gamma = x\sqrt{3}$

Στο ΑΒΓ τρίγωνο ισχύει η γνωστή μετρική σχέση

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \text{ ή } B\Delta = \frac{AB^2}{B\Gamma} \text{ ή } B\Delta = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} = \frac{AB}{2}.$$

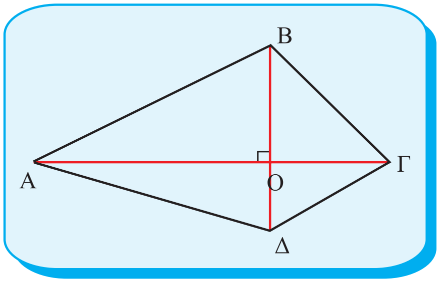
Επίσης $\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 2x - \frac{x}{2} = \frac{3x}{2} = \frac{3 \cdot AB}{2}$. Επομένως $\Delta\Gamma = \frac{3AB}{2}$

Άσκηση 4

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κάθετες διαγωνίους να δείξετε ότι:

$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 \quad \textbf{(1)}$$

Λύση



Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ το πρώτο μέλος της (1) γράφεται

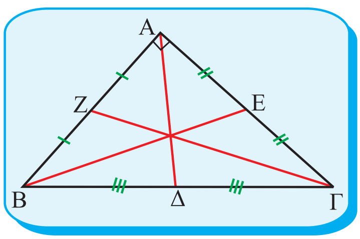
$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = (OA^2 + OB^2) + (O\Gamma^2 + O\Delta^2) =$$

$$= (OA^2 + O\Delta^2) + (OB^2 + O\Gamma^2) = AB^2 + B\Gamma^2$$

Άσκηση 5

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ οι διάμεσοι του. Να δείξετε ότι $A\Delta^2 + BE^2 + \Gamma Z^2 = \frac{3\alpha^2}{2}$

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διάμεσος, οπότε $A\Delta^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4}$ (1)

Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = \gamma^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = \gamma^2 + \frac{\beta^2}{4} \quad (2)$$

Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΖ έχουμε:

$$ΓΖ^2 = ΑΖ^2 + ΑΓ^2 = \left(\frac{γ}{2}\right)^2 + β^2 = \frac{γ^2}{4} + β^2 \quad (3)$$

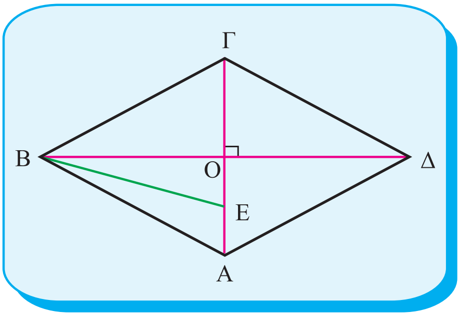
Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2), (3) έχουμε:

$$ΑΔ^2 + ΒΕ^2 + ΓΖ^2 = \frac{α^2}{4} + β^2 + γ^2 + \frac{β^2 + γ^2}{4} = \frac{α^2}{4} + α^2 + \frac{α^2}{4} = \frac{3α^2}{2}$$

Άσκηση 6

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και ένα σημείο Ε της διαγωνίου ΑΓ να δείξετε ότι $ΑΒ^2 - ΒΕ^2 = ΕΓ \cdot ΕΑ$

Λύση



Στα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΟ και ΑΒΟ εφαρμόζουμε το Π.Θ. και έχουμε:

$$ΒΕ^2 = ΟΕ^2 + ΟΒ^2 \ (1)$$

$$ΒΑ^2 = ΟΒ^2 + ΟΑ^2 \ (2)$$

Με αφαίρεση της (1) από (2) έχουμε:

$$ΒΑ^2 - ΒΕ^2 = ΟΒ^2 + ΟΑ^2 - ΟΕ^2 - ΟΒ^2$$

$$\Leftrightarrow ΒΑ^2 - ΒΕ^2 = ΟΑ^2 - ΟΕ^2 \Leftrightarrow$$

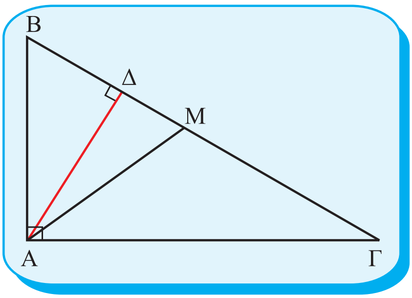
$$\Leftrightarrow ΒΑ^2 - ΒΕ^2 = (ΟΑ - ΟΕ)(ΟΑ + ΟΕ) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ΒΑ^2 - ΒΕ^2 = ΕΑ \cdot (ΟΓ + ΟΕ) \Leftrightarrow ΒΑ^2 - ΒΕ^2 = ΕΑ \cdot ΕΓ$$

Άσκηση 7

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β} = 2\hat{Γ}$ **. Να δείξετε ότι** $\frac{ΑΓ^2}{ΑΒ^2} = 3$ **.**

Λύση



Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και $\hat{Β} = 2\hat{Γ}$ είναι $\hat{Β} = 60^ο$ και $\hat{Γ} = 30^ο$.

Φέρνουμε το ύψος ΑΔ και την διάμεσο ΑΜ του τριγώνου τότε: $\frac{ΑΓ^2}{ΑΒ^2} = \frac{ΔΓ}{ΔΒ}$ (1)

Το ΑΒΜ τρίγωνο είναι ισόπλευρο αφού $\hat{Β} = 60^ο$ και $ΑΜ = ΒΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ (από γνωστό θεώρημα της διαμέσου στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου). Άρα ΑΔ εκτός από ύψος είναι και διάμεσος, δηλ. $ΜΔ = ΔΒ$ (2). Ακόμα $ΓΜ = ΜΒ = 2ΔΒ$ (3).

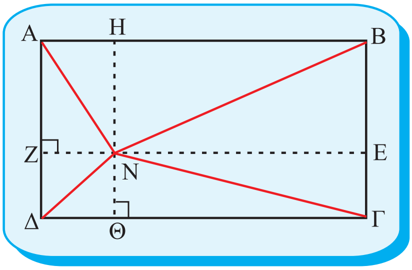
Άρα $\Delta\Gamma = \Delta M + M\Gamma = \Delta B + 2\Delta B = 3\Delta B$

Οπότε η σχέση (1) γράφεται: $\dfrac{A\Gamma^2}{AB^2} = \dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \dfrac{3\Delta B}{\Delta B} = 3$

Άσκηση 8

Αν Ν είναι εσωτερικό σημείο ορθογωνίου ΑΒΓΔ να αποδείξετε ότι $NA^2 + N\Gamma^2 = NB^2 + N\Delta^2$

Λύση



Από το Ν φέρνουμε τις κάθετες ΝΕ, ΝΖ, ΝΗ, ΝΘ στις πλευρές του ορθογωνίου. Τα τρίγωνα ΑΝΖ και ΝΘΓ είναι ορθογώνια οπότε $NA^2 = NZ^2 + ZA^2$ (1) και $N\Gamma^2 = N\Theta^2 + \Theta\Gamma^2$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:

$$NA^2 + N\Gamma^2 = NZ^2 + ZA^2 + N\Theta^2 + \Theta\Gamma^2 \quad (3)$$

Όμοια από τα ορθογώνια τρίγωνα ΝΒΕ και ΝΖΔ έχουμε: $NB^2 = NE^2 + EB^2$ (4) και $N\Delta^2 = Z\Delta^2 + ZN^2$ (5)

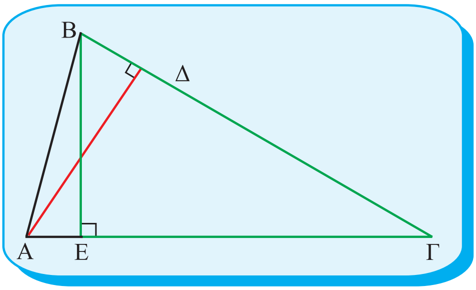
Με πρόσθεση των (4), (5) έχουμε: $NB^2 + N\Delta^2 = NE^2 + EB^2 + Z\Delta^2 + ZN^2$ (6)

Από (3), (6) έχουμε: $NA^2 + N\Gamma^2 = NB^2 + N\Delta^2$ αφού $ZA = EB$, $Z\Delta = N\Theta$, $NE = \Theta\Gamma$ ως απέναντι πλευρές ορθογωνίων.

Άσκηση 9

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \gamma$ **να δείξετε ότι** $\hat{A} = 90^0$

Λύση



Ισχύει $\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \gamma \Leftrightarrow B\Gamma \cdot A\Delta = A\Gamma \cdot AB$ (1)

Έστω ότι $\hat{A} \neq 90^o$. Φέρνουμε ΒΕ κάθετη στην ΑΓ οπότε τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΔΓ είναι όμοια αφού $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^o$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$. Άρα ισχύει:

$$\frac{BE}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} \Leftrightarrow BE \cdot A\Gamma = B\Gamma \cdot A\Delta \quad (2)$$

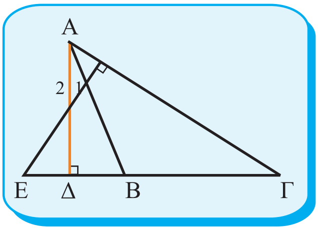
Από (1) και (2) προκύπτει ότι: $BE = AB$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. Άρα $\hat{E} = \hat{A} = 90^o$ που είναι άτοπο.

Επομένως $\hat{A} = 90^o$.

Άσκηση 10

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^o$. **Να αποδείξετε ότι το ύψος του ΑΔ είναι μέσο ανάλογο των ΒΔ και ΓΔ.**

Λύση



Φέρουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου και τη βοηθητική $AE \perp A\Gamma$. Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο, άρα $A\Delta^2 = E\Delta \cdot \Gamma\Delta$ (1).

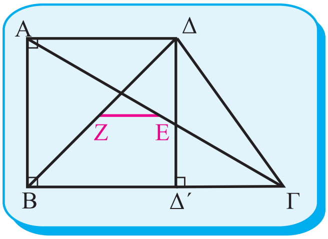
Η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΒΔ. Άρα $\hat{B} = 90 + \hat{A}_1$, άρα $\hat{A}_1 = B - 90^o$ και λόγω της υπόθεσης $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$ $\left(\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = \hat{B} - 90^o\right)$.

Επίσης $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}$ διότι έχουν τις πλευρές κάθετες. Επομένως $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ δηλαδή το ύψος του ΑΔ είναι και διχοτόμος, άρα και διάμεσος. Δηλαδή $E\Delta = B\Delta$. Τότε η σχέση (1) γράφεται $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta$.

Άσκηση 11

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\hat{A} = \hat{B} = 90^o$. Φέρνουμε τις διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ και ενώνουμε τα μέσα τους Ε και Ζ. ΝΑ αποδειχθεί ότι: $\Gamma\Delta^2 = AB^2 + 4EZ^2$.

Λύση



Φέρνουμε $\Delta\Delta' \perp B\Gamma$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Delta'\Gamma$ ισχύει $\Gamma\Delta^2 = (\Delta\Delta')^2 + (\Gamma\Delta')^2$. Όμως $AB = \Delta\Delta'$ (διότι $A\Delta\Delta'B$ ορθογώνιο). Άρα $\Gamma\Delta^2 = AB + \Gamma\Delta'^2$ (1).

Επειδή Ζ, Ε μέσα διαγωνίων τραπεζίου ισχύει:

$$ZE = \frac{\Gamma B - A\Delta}{2} \Leftrightarrow ZE = \frac{\Gamma B - B\Delta'}{2} \Leftrightarrow 2ZE = \Gamma\Delta'.$$

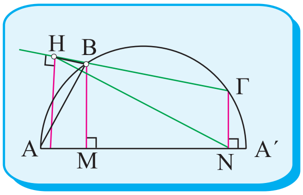
Αντικαθιστώντας το $\Gamma\Delta'$ στη σχέση (1) έχουμε $\Gamma\Delta^2 = AB^2 + (2ZE)^2 = AB^2 + 4ZE^2$.

Άσκηση 12

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΑ΄ και δύο σημεία του Β και Γ. Αν Μ και Ν οι προβολές των Β και Γ πάνω στην ΑΑ΄ και Η η προβολή του Α στην ευθεία ΒΓ, να αποδειχθεί ότι $AH^2 = AM \cdot AN$.

Λύση

Το τετράπλευρο ΑΗΒΜ είναι εγγράψιμο διότι $A\hat{H}B = A\hat{M}B = 90^o$ άρα $A\hat{H}B + A\hat{M}B = 180^o$.



Άρα $H\hat{M}A = H\hat{B}A$ (διότι η πλευρά ΑΗ πρέπει να φαίνεται με ίσες γωνίες από τις κορυφές Β και Μ).

Επίσης η $H\hat{B}A = \Gamma\hat{A}'A$ (διότι το $AB\Gamma A'$ είναι εγγεγραμμένο).

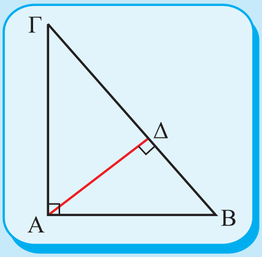
Επίσης $\Gamma\hat{A}'A = A\hat{\Gamma}N$ (οξείες γωνίες με τις πλευρές κάθετες) και $A\hat{\Gamma}N = A\hat{H}N$ (διότι ΑΗΓΝ εγγράψιμο).

Από τα παραπάνω έχουμε ότι $A\hat{H}N = H\hat{M}A$. Άρα τα τρίγωνα ΑΗΝ και ΑΗΜ είναι όμοια αφού έχουν $\hat{A}$ κοινή και $A\hat{H}N = H\hat{M}A$. Επομένως $\frac{AH}{AN} = \frac{AM}{AH} \Leftrightarrow AH^2 = AM \cdot AN$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

(Στη συνέχεια όπου αναφέρεται π.χ. AB = 5 εννοείται AB = 5 μονάδες μήκους.)

1. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 1L\right)$ και το ύψος του ΑΔ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις.



i. $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$ **ii.** $A\Delta^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$

iii. $AB^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$ **iv.** $AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$

v. $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta$ **vi.** $AB \cdot A\Gamma = B\Gamma \cdot A\Delta$

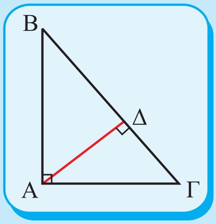
2. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α. Το ύψος του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσο με:

α. $\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha$ **β.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha$ **γ.** $\frac{1}{2}\alpha$ **δ.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha$

3. Αν ΑΒ = 5, ΑΔ = 3 τότε ΓΔ =.... **α.** 2 **β.** 2,5 **γ.** 2,25 **δ.** 1,5

4. Να δείξετε οτι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^o\right)$ ισχύει $\beta + \gamma \le \alpha\sqrt{2}$

(**Υπ.**: Υψώνουμε και στα δύο μέλη στο τετράγωνο. Χρησιμοποιούμε Π.Θ.)



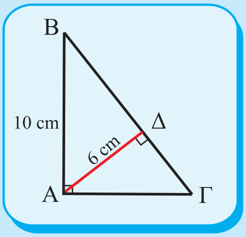
5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^o\right)$ και το ύψος του ΑΔ. Αν ΒΓ = 15 και ΑΔ = 6 να υπολογίσετε τα τμήματα ΒΔ και ΓΔ.

(**Απ**: ΒΔ = 3 και ΓΔ = 12 ή ΒΔ = 12 και ΓΔ = 3).

6. Στο σχήμα στην επόμενη σελίδα η πλευρά ΓΔ είναι ίση με:

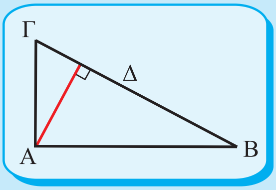
α. 5,5 cm **β.** 8 cm **γ.** 4 cm

δ. 5 cm **ε.** 4,5 cm.



7. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Αν $\frac{AB}{A\Gamma}=2$ τότε $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$:

α. 3 **β.** 4 **γ.** 2 **δ.** 1 **ε.** 5



8. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΑΒ, δύο χορδές του ΑΓ και ΑΔ και τις προβολές τους ΑΕ και ΑΖ πάνω στη διάμετρο ΑΒ. Να αποδειχθεί ότι: $\frac{A\Gamma^2}{A\Delta^2}=\frac{AE}{AZ}$.

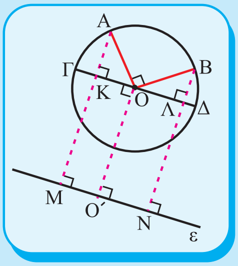
9. Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ και κέντρου Ο. Με διάμετρο την ΑΟ κατασκευάζουμε κύκλο. Από τυχαίο σημείο Γ της ΟΑ, φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ που τέμνει τον εσωτερικό κύκλο στο Δ και τον εξωτερικό στο Ε. Να αποδείξετε ότι: $AE^2=2\cdot A\Delta^2$.

10. Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και σημείο Σ εκτός αυτού. Αν από το Σ άγονται δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους που τέμνουν τον κύκλο στα Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα να δείξετε οτι το άθροισμα $\Sigma A^2+\Sigma B^2+\Sigma\Gamma^2+\Sigma\Delta^2$ είναι σταθερό.

(**Υπ**: Στα ορθογώνια τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΒΔ εφαρμόζουμε το Π.Θ. Φέρνουμε την διάμετρο ΑΟΕ. Παρατηρούμε οτι $A\hat{B}E=90^0$ και ΓΔΕΒ ισοσκελές τραπέζιο).

11. Να δείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των προβολών δύο κάθετων ακτίνων σε τυχαία διάμετρο του κύκλου και σε τυχαία ευθεία του επιπέδου είναι σταθερό.

(**Υπ**: Φέρνουμε την διάμετρο ΓΔ ώστε ΓΔ//ε (ε: τυχαία ευθεία του επιπέδου). Παρατηρούμε ΟΚ = Ο΄Μ, ΟΛ = Ο΄Ν και ΑΚ = ΟΛ).



12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^o\right)$, $\hat{\Gamma}=30^o$ και η διάμεσος $BE=\sqrt{7}$.

Να αποδείξετε ότι $BE^2+\frac{3}{4}\cdot A\Gamma^2=B\Gamma^2$ και να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.

(**Απ:** ΒΓ = 4, ΑΒ = 2, $A\Gamma=2\sqrt{3}$)

13. Θεωρούμε τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ και τη διχοτόμο Οx της ορθής ΑΟΒ. Από τυχαίο Γ του τόξου ΑΒ φέρνουμε $\Gamma E\perp OA$ που τέμνει την Οx στο Δ. Να αποδείξετε ότι: $\Gamma E^2+\Delta E^2=OA^2$.

14. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$, και ΑΔ το ύψος του. Αν $A\Delta=B\Gamma=8\,cm$ να βρείτε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$. Στην υποτείνουσα ΒΓ παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ και φέρνουμε $\Delta x \perp B\Gamma$ (Δx ημιευθεία προς το ημιεπίπεδο που περιέχει το Α). Η Δx τέμνει τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Επί της Δx παίρνουμε σημείο Κ ώστε $B\hat{K}\Gamma = 90^o$. Να δείξετε ότι:

i. $\Delta K^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$ **ii.** $\Delta K^2 = \Delta Z \cdot \Delta E$

16. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και Ε ένα σημείο της διαγωνίου ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:

i. $AB^2 - AE^2 = EB \cdot E\Delta$ **ii.** $BE^2 + E\Delta^2 = 2 \cdot AE^2$

(**Υπ: i.** $AB^2 = AO^2 + OB^2$ (Ο: το κέντρο του ΑΒΓΔ) $AE^2 = AO^2 + OE^2$
ii. ΒΕ = ΟΒ+ΒΕ ΕΔ = ΟΔ - ΟΕ)

17. Σε κύκλο (Ο, ΟΑ) φέρνουμε $B\Gamma // OA$. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma^2 + AB^2 = 4 \cdot OA^2$.

18. Σε κύκλο (O,R), θεωρούμε διάμετρο ΑΒ, και δύο κάθετες μεταξύ τους ακτίνες ΟΓ και ΟΔ. Αν ΟΕ και ΟΖ είναι οι προβολές των ακτίνων πάνω στη διάμετρο, να αποδειχθεί ότι: $OE^2 + OZ^2 = R^2$.

19. Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΟΒ (ΑΟ = ΟΒ = R). Με διαμέτρους ΑΟ και ΟΒ κατασκευάζουμε δύο νέους κύκλους.Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται και στους τρείς κύκλους.
(**Υπ**: Αν Γ μέσο του ΑΟ και Κ το κέντρο του ζητούμενου κύκλου,εφαρμόζουμε Π.Θ. (Πυθαγόρειο θεώρημα) στο τρίγωνο ΓΟΚ). (**Απ:** R)

20. Δίνεται κύκλος (O,R) και δύο κάθετες χορδές του ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται στο σημείο Μ. Να αποδειχθεί ότι:

i. $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 4R^2$ **ii.** $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 + B\Delta^2 + \Delta A^2 = 8R^2$

Ε “ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ”

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$. Εξωτερικά του τριγώνου, με πλευρές ΑΒ και ΑΓ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ είναι το μέσον του τμήματος ΔΖ, να δείξετε οτι το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

2. Θεωρούμε ημικύκλιο με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Φέρνουμε τις εφαπτόμενες ε_1 και ε_2 στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε στο ημικύκλιο ΑΒ. Αν η εφαπτομένη στο Ε τέμνει την ε_1 στο Γ και την ε_2 στο Δ να δείξετε οτι:

i. Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο και το γινόμενο ΑΓ·ΒΔ είναι σταθερό. (Δηλ. δεν εξαρτάται απο την θέση Ε).

ii. Αν Ζ είναι η προβολή του Ε στην ΑΒ, τότε η ΖΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΓΖΔ.

iii. Το γινόμενο $EZ \cdot \Gamma\Delta$ είναι σταθερό.

Μάθημα 5

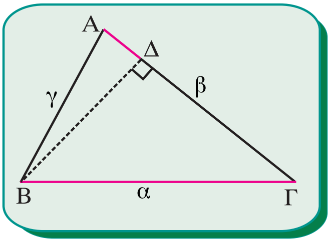
Μετρικές σχέσεις σε τυχαίο τρίγωνο

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Θεώρημα Ι (Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος για πλευρά που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία)

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές, επί την προβολή της άλλης επάνω σε αυτήν για παράδειγμα

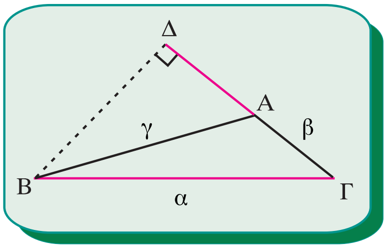
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \mathrm{A\Delta}$$



Θεώρημα ΙΙ (Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος για πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία)

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές, επί την προβολή της άλλης πάνω σ' αυτήν για παράδειγμα

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \mathrm{A\Delta}$$



Πόρισμα

i. $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 1^L$ **ii.** $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 1^L$ **iii.** $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 1^L$

Νόμος Συνημιτόνων

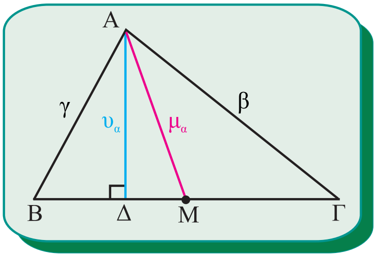
Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A, \quad \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\,\text{συν}B, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,\text{συν}\Gamma$$

Θεώρημα ΙΙΙ (1ο θεώρημα διαμέσων)

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου, ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου, που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς για παράδειγμα

$$\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}$$



Θεώρημα IV (2ο θεώρημα διαμέσων)

Η διαφορά των τετραγώνων των δύο πλευρών ενός τριγώνου, ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς, επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου στην πλευρά αυτή.

Για παράδειγμα: $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha\cdot\Delta M \ (\beta > \gamma)$

Τύποι διαμέσων:

$$\mu_\alpha^2=\frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4} \qquad \mu_\beta^2=\frac{2\alpha^2+2\gamma^2-\beta^2}{4} \qquad \mu_\gamma^2=\frac{2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}{4}$$

Βασική εφαρμογή

Το ύψος υ_α, τριγώνου ΑΒΓ, δίνεται από τη σχέση $\upsilon_\alpha=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ όπου

$$\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος

Χρησιμοποιούμε τις μετρικές σχέσεις που μάθαμε σ' αυτήν αλλά και στην προηγούμενη παράγραφο, ανάλογα με την περίπτωση. π.χ. όταν στο πρόβλημα εμπλέκεται διάμεσος χρησιμοποιούμε τον τύπο της αντίστοιχης διαμέσου. Για τον υπολογισμό γωνιών χρησιμοποιούμε τις προτάσεις που μάθαμε για τις σχέσεις καθέτων πλευρών και γωνιών σε ορθογώνια τρίγωνα ή απ' ευθείας το νόμο των συνημιτόνων όπου μια γωνία προσδιορίζεται από το συνημιτονό της.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

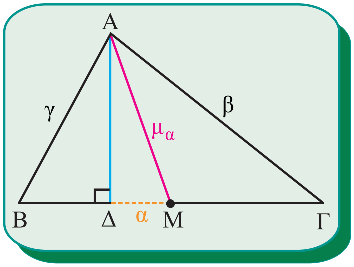
Ι. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta=7$, $\gamma=6$ και $\mu_\alpha=\frac{7}{2}$. Να υπολογίσετε:

α. την πλευρά α   β. την προβολή της διαμέσου μ_α πάνω στην ΒΓ.

Λύση

α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζουμε το πρώτο θεώρημα των διαμέσων $\beta + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$ και λύνουμε ως προς α:

$$\alpha = \sqrt{2\beta^2 + 2\gamma^2 - 4\mu_\alpha{}^2} = \sqrt{2\cdot 49 + 2\cdot 36 - 4\frac{49}{4}} = \sqrt{121} = 11$$



β. Στο ΑΒΓ η προβολή της διαμέσου στην πλευρά α είναι η ΔΜ. Εφαρμόζουμε το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων στο ΑΒΓ, με $\beta > \gamma$ και έχουμε: $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta$

Άρα $M\Delta = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} = \frac{49 - 36}{2 \cdot 11} = \frac{13}{22}$

Άσκηση 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 3, ΒΓ = 5 και ΓΑ = 7. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.

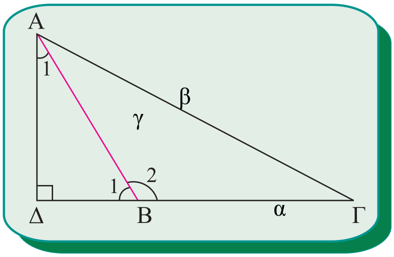
Λύση

α΄ τρόπος

Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων για τη γωνία $\hat{B}$ και είναι $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu\hat{B}$. Λύνουμε ως προς συν$\hat{B}$ και έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{25 + 9 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$$

οπότε $\hat{B} = 120^o$.



β΄ τρόπος

Έχουμε $\beta^2 = 49$ και $\alpha^2 + \gamma^2 = 25 + 9 = 34$. Παρατηρούμε ότι $\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2$ οπότε $\hat{B} > 1^L$

Από το Θεώρημα ΙΙ, έχουμε: $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot B\Delta \Leftrightarrow 49 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot B\Delta \Leftrightarrow B\Delta = \frac{3}{2}$

Επομένως $\Delta B = \frac{AB}{2}$.

Επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η κάθετη πλευρά ΒΔ είναι το μισό της υποτείνουσας η απέναντι οξεία γωνία είναι: $\hat{A}_1 = 30^o$ οπότε $\hat{B}_1 = 60^o$ και $\hat{B}_2 = 120^o$.

Άσκηση 3

Να βρείτε το είδος της γωνίας που βρίσκεται απέναντι στη μεγαλύτερη πλευρά τριγώνου ΑΒΓ όταν:

α. α = 5, β= 12, γ = 13 **β. α = 4, β = 5, γ = 6** **γ. α = 4, β = 5, γ = 7**

Λύση

Σύμφωνα με θεώρημα που μάθαμε στην ύλη της Α΄ Λυκείου σ' ένα τρίγωνο απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά, βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία. Έτσι, έχουμε:

α. Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η γ με $\gamma^2 = 169$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 25 + 144 = 169$.

Είναι $\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2$ οπότε $\hat{\Gamma} = 1^{\llcorner}$

β. Η μεγαλύτερη πλευρά η γ με $\gamma^2 = 36$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 16 + 25 = 41$.

Είναι $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$ οπότε $\hat{\Gamma} < 1^{\llcorner}$

γ. Η μεγαλύτερη πλευρά η γ με $\gamma^2 = 49$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 16 + 25 = 41$.

Είναι $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$ οπότε $\hat{\Gamma} > 1^{\llcorner}$

Άσκηση 4

Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο με πλευρές:

i. $\gamma = \frac{\alpha}{3}$, $\beta = \frac{3\alpha}{5}$, **α** **ii.** $\gamma = \frac{7\alpha}{5}$, $\beta = \frac{\alpha}{3}$, **α** **iii.** $\alpha = \kappa$, $\beta = \frac{\kappa}{2}$, $\gamma = \frac{2\kappa}{3}$, $\kappa > 0$

Στην περίπτωση που υπάρχει να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

Λύση

i. Αν υπήρχε τρίγωνο με πλευρές $\gamma = \frac{\alpha}{3}$ και $\beta = \frac{3\alpha}{5}$ τότε θα είχαμε $\beta + \gamma = \frac{3\alpha}{5} + \frac{\alpha}{3} = \frac{14\alpha}{15} < \alpha$.

Άτοπο γιατί πρέπει λόγω τριγωνικής ανισότητας $\beta + \gamma > \alpha$.

ii. Αν υπήρχε τρίγωνο με πλευρές $\gamma = \frac{7\alpha}{5}$, $\beta = \frac{\alpha}{3}$ τότε θα είχαμε $\gamma - \beta = \frac{7\alpha}{5} - \frac{\alpha}{3} = \frac{16\alpha}{15} > \alpha$.

Άτοπο διότι πρέπει λόγω τριγωνικής ανισότητας $\gamma - \beta < \alpha$.

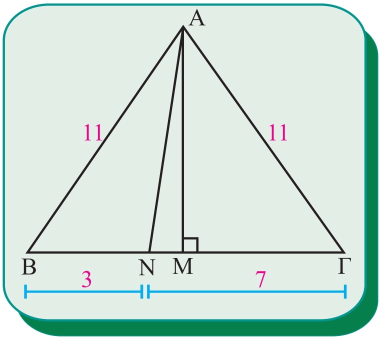
iii. Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η α. Αφού ισχύει $\frac{\kappa}{6} = \frac{2\kappa}{3} - \frac{\kappa}{2} < \alpha = \kappa < \frac{\kappa}{2} + \frac{2\kappa}{3} = \frac{7\kappa}{6}$ υπάρχει τρίγωνο με αυτές τις πλευρές. Έχουμε $\alpha^2 = \kappa^2$ και $\beta^2 + \gamma^2 = \frac{\kappa^2}{4} + \frac{4\kappa^2}{9} = \frac{25\kappa^2}{36} < \kappa^2$.

Άρα $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ $\hat{A} > 90^o$, οπότε $\hat{B} < 90^o$ και $\hat{\Gamma} < 90^o$.

Άσκηση 5

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΒΓ) και Ν σημείο της βάσης του ΒΓ. Αν ΒΝ = 3, ΝΓ = 7 και ΑΒ = ΑΓ = 11 να υπολογιστεί το ΑΝ.

Λύση



Έστω ΑΜ η διάμεσος άρα και ύψος του τριγώνου ΑΒΓ. Αφού ΒΝ < ΝΓ είναι $A\hat{N}B > 90^o$. Εφαρμόζοντας το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΝ έχουμε:

$AB^2 = BN^2 + NA^2 + 2BN \cdot NM$ ή

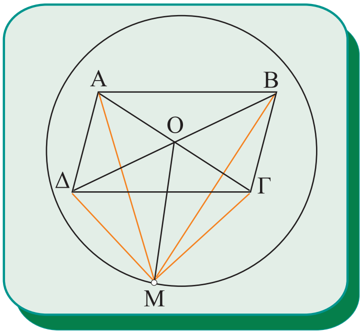
$11^2 = 3^2 + NA^2 + 2\cdot 3(7-5) \Leftrightarrow 121 = 9 + NA^2 + 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow NA^2 = 100 \Leftrightarrow NA = 10$

Άσκηση 6

Με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, γράφουμε κύκλο. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο του κύκλου, να αποδείξετε ότι το άθροισμα $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2$ είναι σταθερό.

Λύση



Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Άρα στα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΑΓ η ΜΟ είναι διάμεσος. Από το θεώρημα των διαμέσων στα τρίγωνα αυτά έχουμε:

$$MB^2 + M\Delta^2 = 2MO^2 + \frac{B\Delta^2}{2} \quad (1)$$

$$MA^2 + M\Gamma^2 = 2MO^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} \quad (2)$$

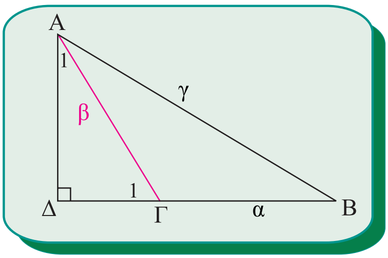
Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε

$MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 4MO^2 + \frac{B\Delta^2}{2} + \frac{A\Gamma^2}{2}$ που είναι σταθερό.

Άσκηση 7

Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta}$ να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\Gamma}$.

Λύση



Έχουμε $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ (1) οπότε $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$ άρα $\hat{\Gamma} > 90^o$. Εφαρμόζοντας το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα για την αμβλεία γωνία Γ στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cdot \Gamma\Delta$ (2). Από (1), (2) έχουμε:

$\beta = 2\Gamma\Delta \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{\beta}{2}$. Άρα $\hat{A}_1 = 30^o$ αφού το ΑΓΔ τρίγωνο είναι ορθογώνιο θα είναι $\hat{\Gamma}_1 = 60^o$ και $\hat{\Gamma}_2 = 120^o$.

Παρατήρηση: Το πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί και με τον νόμο των συνημιτόνων: $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$.

Άσκηση 8

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha^3 = \beta^3 + \gamma^3$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

Λύση

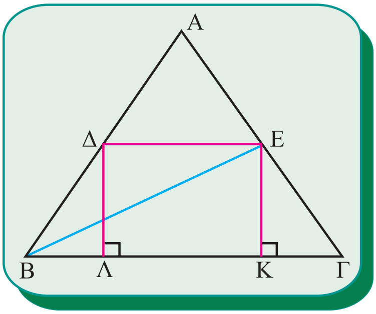
Επειδή $\alpha^3 = \beta^3 + \gamma^3$ (1), είναι $\alpha^3 > \beta^3$, και $\alpha^3 > \gamma^3$ δηλαδή $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$. Άρα η μεγαλύτερη πλευρά είναι η α, οπότε: $\begin{cases} \alpha > \beta \\ \alpha > \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot \beta^2 > \beta^3 \\ \alpha \cdot \gamma^2 > \gamma^3 \end{cases}$. με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$\alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 > \beta^3 + \gamma^3 \Leftrightarrow \alpha\left(\beta^2 + \gamma^2\right) > \beta^3 + \gamma^3$ και λόγω της (1) έχουμε:

$\alpha\left(\beta^2 + \gamma^2\right) > \alpha^3 \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 > \alpha^2$. Άρα $A < 90^o$.

Άσκηση 9

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ευθεία παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $ΒΕ^2 = ΕΓ^2 + ΒΓ \cdot ΔΕ$.



Λύση

Είναι $\hat{\Gamma} < 90^o$, ως γωνία βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Έστω Λ, Κ οι προβολές των Δ, Ε αντίστοιχα στην πλευρά ΒΓ. Από το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα για οξεία γωνία στο τρίγωνο ΒΓΕ έχουμε:

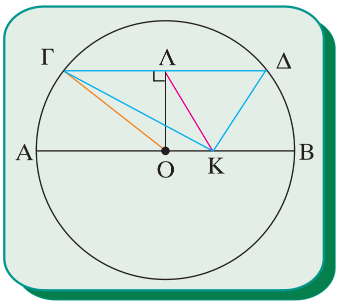
$$ΒΕ^2 = ΕΓ^2 + ΒΓ^2 - 2ΒΓ \cdot ΓΚ = ΕΓ^2 + ΒΓ\left(ΒΓ - 2ΓΚ\right) \overset{*}{=}$$

$$= ΕΓ^2 + ΒΓ\left(ΒΓ - ΚΓ - ΒΛ\right) = ΕΓ^2 + ΒΓ \cdot ΛΚ = ΕΓ^2 + ΒΓ \cdot ΔΕ$$

(* Είναι ΒΛ = ΚΓ διότι τα τρίγωνα ΒΛΔ, ΕΓΚ είναι ίσα)

Άσκηση 10

Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ και μια χορδή του ΓΔ//ΑΒ. Αν Κ είναι ένα σημείο της ΑΒ να δειχτεί ότι $ΚΓ^2 + ΚΔ^2 = ΚΑ^2 + ΚΒ^2$.



Λύση

Έστω Λ το μέσον του ΓΔ. Τότε $ΟΛ \perp ΓΔ$ και ΓΔ = 2ΓΛ.
Εφαρμόζουμε το 1° θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΚΓΔ:

$$ΚΔ^2 + ΚΓ^2 = 2ΚΛ^2 + \frac{ΓΔ^2}{2}.$$

Άρα $K\Delta^2 + K\Gamma^2 = 2K\Lambda^2 + \frac{4\Gamma\Lambda^2}{2} = 2K\Lambda^2 + 2\Gamma\Lambda^2 =$

$= 2\left(KO^2 + \Lambda O^2\right) + 2\left(\Gamma O^2 - O\Lambda^2\right) = 2KO^2 + 2\Lambda O^2 + 2\Gamma O^2 - 2O\Lambda^2 = 2\left(KO^2 + R^2\right)$ (1)

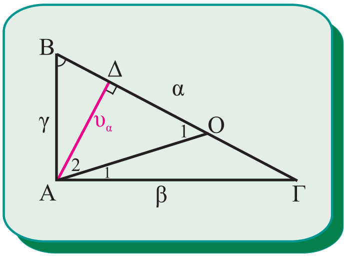
Επίσης $KA^2 + KB^2 = \left(R + OK\right)^2 + \left(R - OK\right)^2 = 2\left(R^2 + OK^2\right)$ (2)

Από (1), (2) έχουμε $K\Gamma^2 + K\Delta^2 = KA^2 + KB^2$

Άσκηση 11

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^o\right)$ είναι $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\beta^2 - \gamma^2 = 2\beta\gamma$.

Λύση



Επειδή $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o$ έχουμε $\hat{\Gamma} = 22,5^o$ και $\hat{B} = 67,5^o$. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ και τη διάμεσο ΑΟ. Από το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων έχουμε $\beta^2 - \gamma^2 = 2 \cdot \alpha \cdot O\Delta (1)$. Το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές $\left(AO = \frac{B\Gamma}{2} = O\Gamma\right)$. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma} = 22,5^o$ άρα $\hat{O}_1 = 45^o$. Το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισοσκελές ($\hat{A}_2 = \hat{O}_1 = 45^o$), επομένως $\Delta O = A\Delta$.

Έτσι η σχέση (1) γράφεται: $\beta^2 - \gamma^2 = 2 \cdot \alpha \cdot A\Delta \ (2)$.

Όμως σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \upsilon_\alpha$.

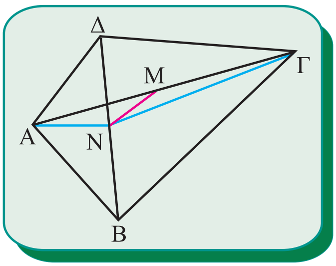
Τότε η σχέση (2) γράφεται: $\beta^2 - \gamma^2 = 2 \cdot \beta \cdot \gamma$.

Άσκηση 12

(Θεώρημα Euler)

Να δειχτεί ότι το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του αυξημένο κατά το τετραπλάσιο τετράγωνο του τμήματος που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του.

Λύση



Εφαρμόζοντας το 1ο Θεώρημα των διαμέσων στα τρίγωνα ΑΒΔ, ΓΒΔ, έχουμε:

$$AB^2 + A\Delta^2 = 2AN^2 + \frac{B\Delta^2}{2} \quad (1),$$

$$\Gamma\Delta^2 + \Gamma B^2 = 2N\Gamma^2 + \frac{\Delta B^2}{2} \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε:

$$AB^2 + A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 + \Gamma B^2 = 2\left(AN^2 + N\Gamma^2\right) + \Delta B^2$$

Εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ANΓ}$ και έχουμε:

$$NA^2 + NΓ^2 = 2NM^2 + \frac{AΓ^2}{2} \qquad (3)$$

Από (3), (4) προκύπτει: $2\left(2NM^2 + \frac{AΓ^2}{2}\right) + ΔB^2 = 4NM^2 + AΓ^2 + ΔB^2$

Παρατήρηση

Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο τα μέσα των ΑΓ και ΒΔ συμπίπτουν.
Άρα (ΜΝ = 0) και η παραπάνω πρόταση διατυπώνεται ως εξής:
Το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του.

Άσκηση 13

Να δειχτεί ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^o$) ισχύει $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{2}\alpha^2$

Λύση

Αφού $\hat{A} = 90^o$ ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ (1)

Έχουμε

$$\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} + \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} + \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} =$$

$$= \frac{3\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)}{4} \overset{(1)}{=} \frac{3\left(2\alpha^2\right)}{4} = \frac{3\alpha^2}{2}$$

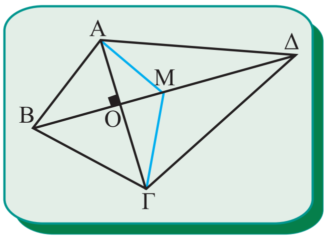
Άσκηση 14

Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι $AΓ \perp BΔ$ αν και μόνο αν $AB^2 + ΓΔ^2 = ΓB^2 + AΔ^2$.

Λύση

Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων και Μ το μέσο του ΒΔ.

Ευθύ: Αν $AΓ \perp BΔ$ από το 2° θεώρημα διαμέσων στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ έχουμε:



$$AΔ^2 - AB^2 = 2BΔ \cdot MO \quad (1) \text{ και}$$

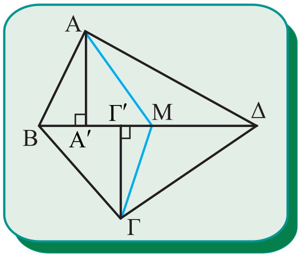
$$ΔΓ^2 - BΓ^2 = 2BΔ \cdot MO \quad (2)$$

Από (1), (2):

$$AΔ^2 - AB^2 = ΔΓ^2 - BΓ^2 \Leftrightarrow AΔ^2 + BΓ^2 = ΔΓ^2 + AB^2$$

Αντίστροφο: Έστω $AB^2 + ΓΔ^2 = ΓB^2 + AΔ^2$. Υποθέτουμε ότι $AΔ > AB$. Έχουμε:

$$AB^2+\Gamma\Delta^2=\Gamma B^2+A\Delta^2 \Leftrightarrow \Gamma\Delta^2-\Gamma B^2=A\Delta^2-AB^2 \quad (1)$$



Πρέπει $\Gamma\Delta^2-\Gamma B^2>0 \Leftrightarrow \Gamma\Delta^2>\Gamma B^2 \Leftrightarrow \Gamma\Delta>\Gamma B$.

Αν $AA'\perp B\Delta$ και $\Gamma\Gamma'\perp B\Delta$ στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ από το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων έχουμε:

$$A\Delta^2-AB^2=2B\Delta\cdot MA', \quad \Gamma\Delta^2-\Gamma B^2=2B\Delta\cdot M\Gamma'$$

Τότε από την (1) έχουμε: $2B\Delta\cdot MA'=2B\Delta\cdot M\Gamma'$ ή $MA'=M\Gamma'$. Άρα $A'\equiv\Gamma'$ αφού τα Α, Γ βρίσκονται από το ίδιο μέρος της μεσοκαθέτου της ΒΔ. Επομένως τα A', Γ' συμπίπτουν στο Ο και $A\Gamma\perp B\Delta$.

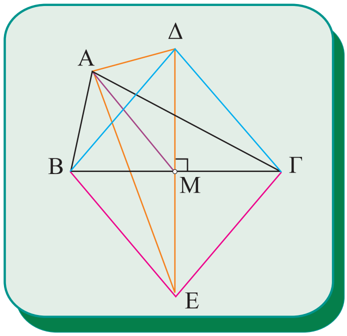
Άσκηση 15

Εκατέρωθεν της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ. Να αποδείξετε ότι $A\Delta^2+AE^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Λύση

Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ, η ΑΜ είναι διάμεσος, διότι το ΒΔΓΕ είναι ρόμβος $(B\Delta=\Gamma\Delta=\Gamma E=BE=B\Gamma)$ άρα οι διαγώνιοι διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα. Εφαρμόζουμε το θεώρημα των διαμέσων στο ΑΔΕ τρίγωνο.

$$A\Delta^2+AE^2=2AM^2+\frac{\Delta E^2}{2} \qquad (1)$$



Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $AM^2=\dfrac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4}$ (2)

Το τρίγωνο ΒΔΜ είναι ορθογώνιο οπότε

$$B\Delta^2=\Delta M^2+BM^2 \Leftrightarrow \Delta M^2=\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{3\alpha^2}{4}.$$

Επομένως $\Delta E^2=(2\Delta M)^2=4\Delta M^2=4\dfrac{3\alpha^2}{4}=3\alpha^2$ (3).

Η σχέση (1) με τη βοήθεια των (2) και (3) γράφεται:

$$A\Delta^2+AE^2=2\frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4}+\frac{3\alpha^2}{2}=\frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2+3\alpha^2}{2}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

Άρα $A\Delta^2+AE^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

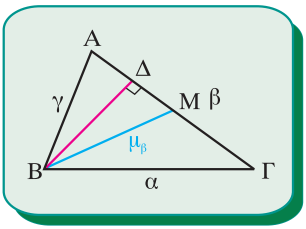
Άσκηση 16

Δίνεται το οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει:

$$\beta^2+2\gamma^2=2\alpha \quad (1)$$

α. Να αποδειχθεί ότι $\mu_\beta=\gamma$ (με μ_β είναι η διάμεσος προς την πλευρά β).

β. Να υπολογισθεί η προβολή της μ_β επί της πλευράς β.



Λύση

α. Σύμφωνα με το 1ο θεώρημα των διαμέσων έχουμε:

$$\alpha^2+\gamma^2=2\mu_\beta^2+\frac{\beta^2}{2}\Leftrightarrow 2\alpha^2+2\gamma^2=4\mu_\beta^2+\beta^2$$

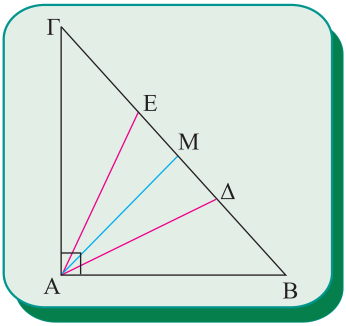
$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\beta^2+2\gamma^2+2\gamma^2=4\mu_\beta^2+\beta^2\Leftrightarrow 4\gamma^2=4\mu_\beta^2\Leftrightarrow \mu_\beta=\gamma$$

β. Σύμφωνα με το α ερώτημα το τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}M$ είναι ισοσκελές με ΑΔ ύψος, οπότε ΑΔ είναι και διάμεσος. Άρα $\Delta M=\frac{AM}{2}=\frac{A\Gamma}{4}=\frac{\beta}{4}$.

Άσκηση 17

Στην υποτείνουσα ΒΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. Να αποδείξετε ότι $A\Delta^2+AE^2=\frac{5}{9}B\Gamma^2$

Λύση



Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ.
Τότε επειδή ΒΜ = ΓΜ και ΒΔ = ΓΕ έχουμε:
$\Delta M=BM-B\Delta=\Gamma M-\Gamma E=EM$.
Άρα η ΑΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΕΔ, επομένως

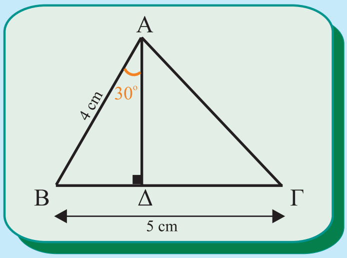
$$A\Delta^2+AE^2=2AM^2+\frac{\Delta E^2}{2}\qquad(1)$$

Επειδή $AM=\frac{B\Gamma}{2}$ και $\Gamma E=\Delta E=\Delta B=\frac{B\Gamma}{3}$ αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε:

$$A\Delta^2+AE^2=2\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2+\frac{\left(\frac{B\Gamma}{3}\right)^2}{2}=2\frac{B\Gamma^2}{4}+\frac{B\Gamma^2}{18}=\frac{5}{9}B\Gamma^2$$

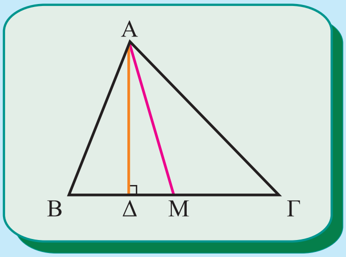
Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB=6\,cm$, $A\Gamma=8\,cm$ και $B\Gamma=7\,cm$. Η ΑΜ είναι διάμεσος και το ΑΔ είναι ύψος. Το ΔΜ ισούται με 3 cm.



2. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = 4cm$, $B\Gamma = 5cm$ και το ΑΔ ύψος και η γωνία $BA\Delta = 30^o$. Το μήκος της πλευράς ΑΓ σε cm ισούται με:

i. 3 **ii.** $\sqrt{41}$ **iii.** $\sqrt{10}$ **iv.** $\sqrt{21}$ **v.** $\sqrt{20}$



3. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ είναι $\hat{A} > 90^o$. Φέρνουμε το ύψος ΒΔ. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma^2 = 2 \cdot A\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι πλευρές του είναι:

i. $\alpha = 4$ $\beta = 6$ $\gamma = 7$

ii. $\alpha = 3$ $\beta = 8$ $\gamma = 6$

Να βρεθεί το είδος των γωνιών του τριγώνου σε κάθε περίπτωση.

5. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ΑΒ = 2, $B\Gamma = 1 + \sqrt{3}$, $A\Gamma = \sqrt{6}$ να υπολογίσετε τη γωνία Β. ($B = 60^o$)

6. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του αν οι πλευρές του είναι $\alpha = 3\kappa$, $\beta = 4\kappa$, $\gamma = 6\kappa$.

7. Δίνεται ένα τρίγωνο με $\hat{A} = 150^o$. να δείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \beta\gamma\sqrt{3}$.

8. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ προεκτείνουμε την ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι $A\Delta^2 = A\Gamma^2 + 2B\Gamma^2$.

9. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ επί της ΒΓ. Να αποδειχθεί ότι $AB^2 - A\Delta^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

10. Σε κάθε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) να δείξετε ότι ισχύει:

$$A\Gamma^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2 \cdot AB \cdot \Gamma\Delta \cdot$$

11. Δίνονται οι κύκλοι (Κ, α) και (Λ, 4α) που εφάπτονται εξωτερικά. Να υπολογίσετε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα αυτών.

(**Απ:** 4α)

12. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $4\mu_\beta^2 = \beta^2 + 2\alpha^2$ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος του ΑΔ και σημείο Ε στην προέκταση της ΒΓ ώστε $ΓΕ = \frac{ΒΓ}{2}$. Να αποδείξετε ότι: $ΑΕ^2 - ΑΒ^2 = 3\left(ΑΓ^2 - ΑΔ^2\right)$.

14. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ. Από το Μ φέρνουμε κάθετη στην ΑΜ που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν ισχύει $ΒΕ^2 + ΕΓ^2 = 2ΕΑ$ να δείξετε ότι $\hat{Α} = 90^o$.

15. Δίνεται κύκλος (Ο, κ) και δύο διάμετροί του ΑΒ και ΓΔ. Έστω Μ σημείο του επιπέδου τέτοιο ώστε: ΑΜ = 15, ΒΜ = 20, ΓΜ = 24. Να βρεθεί το μήκος του ΔΜ.

(**Απ:** ΔΜ = 7)

16. Αν $μ_α = 3$, $μ_β = 4$, $μ_γ = 5$ να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου.

(**Υπ**: Χρησιμοποιείστε τους τύπους $μ_α^2$, $μ_β^2$, $μ_γ^2$ και λύστε το σύστημα $\begin{cases} μ_α^2 = 9 \\ μ_β^2 = 16 \\ μ_γ^2 = 25 \end{cases}$)

17. Αν τα σημεία Δ, Ε τριχοτομούν την υποτείνουσα ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, να δειχτεί ότι $ΑΔ^2 + ΔΕ^2 + ΕΑ^2 = \frac{2}{3}α^2$.

18. Αν σε τρίγωνο ισχύει $υ_α = 2\sqrt{2(τ-β)(τ-γ)}$ τότε να δείξετε ότι τ = 2α.

(**Υπ**: Χρησιμοποιείστε τον τύπο $υ_α = \frac{2}{α}\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$)

19. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και έστω Δ ένα σημείο της ΒΓ. Να δειχτεί ότι $ΑΒ^2 - ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$.

20. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ). Να δειχτεί ότι $ΑΓ^2 - ΒΓ^2 = ΑΒ \cdot ΓΔ$.

21. Αν για τις βάσεις ΑΒ, ΓΔ τραπεζίου έχουμε: ΓΔ = 2ΑΒ να δειχτεί ότι:

$$ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = ΒΓ + ΓΔ^2 + ΔΑ^2$$

(**Υπ**: Αποδείξτε την πιο πάνω σχέση χωριστά αν οι γωνίες μιας βάσης είναι οξείες και χωριστά αν είναι αμβλείες)

22. Στο τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζουμε εκατέρωθεν της ΒΓ ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ. Αν ισχύει $2ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ να δείξετε ότι $Δ\hat{Α}Ε = 90^o$.

Ε. "ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ"

1. Να δείξετε ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>8R^2$, όπου R η ακτίνα του περιγεγγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

2. Σε κύκλο (O, R), θεωρούμε Α τυχαίο αλλά σταθερό σημείο στο εσωτερικό του και κατασκευάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με την υποτείνουσα ΒΓ να είναι χορδή του κύκλου. Αν Μ είναι το μέσον της μεταβλητής υποτείνουσας ΒΓ και Δ το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ, να δείξετε ότι:

i. $AM^2+OM^2=R^2$

ii. το μήκος ΜΔ είναι σταθερό

3. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, πλευράς α. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο του εγεγγραμένου κύκλου του τριγώνου, να δείξετε ότι το άθροισμα $MA^2+MB^2+M\Gamma^2$ είναι σταθερό.

Μάθημα 6

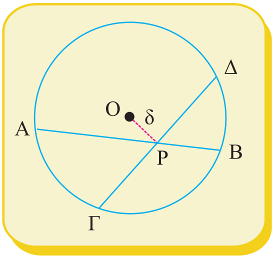
Μετρικές σχέσεις σε κύκλο

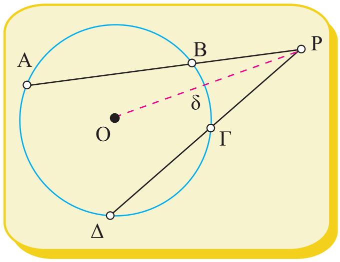
A. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Θεώρημα Ι

Αν οι χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου ή οι προεκτάσεις τους, τέμνονται σ' ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει:

$$ΡΑ \cdot ΡΒ = ΡΓ \cdot ΡΔ$$





Εφαρμογή 1 (αντίστροφο του θεωρήματος Ι)

Αν δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ έτσι ώστε: $ΡΑ \cdot ΡΒ = ΡΓ \cdot ΡΔ$, τότε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ και Δ είναι εγγράψιμο.

Παρατήρηση 1

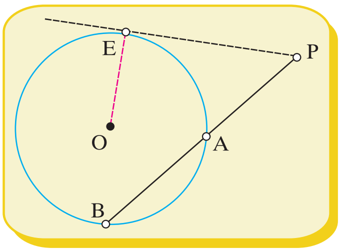
Αν το σημείο Ρ βρίσκεται **εντός του κύκλου** τότε είναι: $ΡΑ \cdot ΡΒ = R^2 - δ^2$

όπου δ = ΟΡ (Ο το κέντρο του κύκλου) και R η ακτίνα του κύκλου.

Αν το σημείο Ρ βρίσκεται **εκτός του κύκλου** τότε: $ΡΑ \cdot ΡΒ = δ^2 - R^2$

Θεώρημα ΙΙ

Αν από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,R), φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α και Β, ισχύει: $ΡΕ^2 = ΡΑ\ ΡΒ$



Εφαρμογή 2 (αντίστροφο του θεωρήματος ΙΙ)
Αν θεωρήσουμε ευθεία ε και τρία σημεία της P, A, B, όπου το σημείο P βρίσκεται εκτός του τμήματος AB και ένα σημείο E εκτός της ε τέτοιο ώστε να ισχύει: $PE^2 = PA \cdot PB$, το τμήμα PE είναι εφαπτόμενο στον κύκλο που ορίζουν τα σημεία A, B, E.

Ορισμός
Έστω P σημείο του επιπέδου του κύκλου (O,R), με δ = OP. Η διαφορά $\delta^2 - R^2$ λέγεται **δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R)** και συμβολίζεται $\Delta^P_{(O,R)}$.

Είναι $\boxed{\Delta^P_{(O,R)} = \delta^2 - R^2}$

Παρατήρηση 2
Το πρόσημο του αριθμού $\delta^2 - R^2$ καθορίζει τη θέση του P ως προς τον κύκλο.
Συγκεκριμένα:
α. Αν το σημείο P βρίσκεται εντός του κύκλου είναι: $\Delta^P_{(O,R)} < 0$
β. Αν το σημείο P βρίσκεται εκτός του κύκλου είναι: $\Delta^P_{(O,R)} > 0$
γ. Αν το σημείο P είναι σημείο του κύκλου είναι: $\Delta^P_{(O,R)} = 0$
δ. Αν το σημείο P συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου είναι: $\Delta^P_{(O,R)} = -R^2$

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία - Μέθοδος 1

Ασκήσεις που δίνονται κάποια ευθύγραμμα τμήματα και ζητείται ο υπολογισμός άλλων ευθυγράμμων τμημάτων (εννοείται ο υπολογισμός του μήκους). Σε απλές ασκήσεις αυτού του τύπου χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα Ι και ΙΙ (εφόσον βέβαια τα τμήματα που εμπλέκονται είναι χορδές ή τέμνουσες κύκλου). Σε πιο σύνθετες ασκήσεις, σίγουρα εμπλέκονται και άλλα θεωρήματα μετρικών σχέσεων (Πυθαγόρειο θεώρημα, θεωρήματα διαμέσων και διχοτόμων κ.λ.π.).Τότε, εφαρμόζουμε το κατάλληλο θεώρημα ή συνδυασμό θεωρημάτων ανάλογα με την περίπτωση.

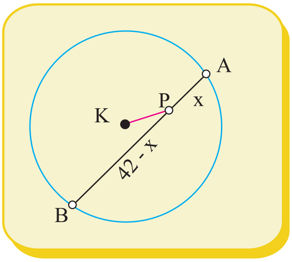
Παράδειγμα 1
Δίνεται κύκλος (K,24) και ένα σημείο P, τέτοιο ώστε PK = 12. Αν η χορδή AB διέρχεται από το σημείο P και είναι AB = 42, να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα PA και PB.
Λύση
Επειδή PK = 12 < 24, το σημείο P είναι στο εσωτερικό του κύκλου.
Οπότε $PA \cdot PB = R^2 - KP^2 \Leftrightarrow PA \cdot PB = 24^2 - 12^2 = 432$.
Αν PA < PB και PA = x τότε ισχύει : $x \cdot (42 - x) = 432$, διότι $PB = AB - PA = 42 - x$.
Άρα $x^2 - 42x + 432 = 0$ (1)
Η διακρίνουσα της (1) είναι :
$$\Delta = 42^2 - 4 \cdot 432 = 1764 - 1728 = 36.$$

Άρα $x=\frac{42+6}{2}=24$ η $x=\frac{42-6}{2}=18$

Επειδή υποθέσαμε ότι PA < PB θα είναι :

PA = 18 και PB = 24.

(Βλέπε και τη λυμένη άσκηση 2)



Κατηγορία - Μέθοδος 2

Σε περίπτωση που στο πρόβλημα εμπλέκονται τέμνουσες κύκλου ή χορδές χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα Ι και ΙΙ. Οι πιο σύνθετες ασκήσεις είναι σίγουρα συνδυαστικές και γίνεται χρήση και άλλων θεωρημάτων μετρικών σχέσεων.
Όταν στην άσκηση εμφανίζεται γινόμενο συνευθειακών σημείων π.χ. PA· PB με P, A, B, συνευθειακά τότε η ευθεία PAB ίσως είναι τέμνουσα κάποιου κύκλου. Αν αυτός δεν έχει ήδη εμφανισθεί, αναζητούμε κάποιο τετράπλευρο που θα είναι εγγράψιμο.

Παράδειγμα 2

Αν η διάμεσος ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε να αποδείξετε ότι :

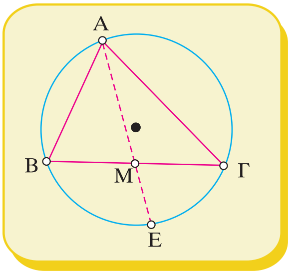
α. $AM\cdot ME=\frac{B\Gamma^2}{4}$ **β.** $A\Gamma^2+AB^2=2AM\cdot AE$

Λύση

α. Ισχύει $MA\cdot ME=M\Gamma\cdot MB$ (τέμνουσες κύκλου)

όμως $BM=M\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $MA\cdot ME=\frac{B\Gamma}{2}\cdot\frac{B\Gamma}{2}=\frac{B\Gamma^2}{4}$ (1)



β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα των διαμέσων και έχουμε

$$A\Gamma^2+AB^2=2AM^2+\frac{B\Gamma^2}{2} \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε : $\frac{B\Gamma^2}{2}=2\frac{B\Gamma^2}{4}=2MA\cdot ME$ (3)

Από τις (2) και (3) παίρνουμε :

$$A\Gamma^2+AB^2=2AM^2+2MA\cdot ME \Leftrightarrow$$
$$A\Gamma^2+AB^2=2AM(AM+ME)\Leftrightarrow A\Gamma^2+AB^2=2AM\cdot AE$$

Παράδειγμα 3

'Εστω ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄τα ύψη τριγώνου ΑΒΓ και Η το ορθόκεντρό του. Να αποδείξετε ότι:

i. $ΗΑ \cdot ΗΑ' = ΗΒ \cdot ΗΒ' = ΗΓ \cdot ΗΓ'$

ii. $ΑΒ \cdot ΑΓ' = ΒΓ \cdot ΒΑ'$ **και** $ΓΑ \cdot ΓΒ' = ΓΒ \cdot ΓΑ'$

iii. $Α'Γ \cdot Β'Α \cdot Γ'Β = Α'Β \cdot Β'Γ \cdot Γ'Α$

Λύση

i. Το τετράπλευρο ΑΒ΄Α΄Β είναι εγγράψιμο διότι η πλευρά ΑΒ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Α΄ και Β΄ υπό ίσες γωνίες (ορθές).

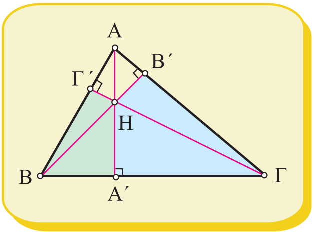
Άρα $ΗΑ \cdot ΗΑ' = ΗΒ \cdot ΗΒ'$ (1)

Όμοια και το τετράπλευρο ΒΓΒ΄Γ΄ είναι εγγράψιμο.

Άρα $ΗΓ \cdot ΗΓ' = ΗΒ \cdot ΗΒ'$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$ΗΑ \cdot ΗΑ' = ΗΒ \cdot ΗΒ' = ΗΓ \cdot ΗΓ'$$



ii. Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΓΒ΄Γ΄ έχουμε:

$$ΑΓ' \cdot ΑΒ = ΑΒ' \cdot ΑΓ \quad (3)$$

Όμοια από τα εγγράψιμα ΑΒΑ΄Β΄ και ΑΓΑ΄Γ΄ έχουμε

$$ΓΒ \cdot ΓΑ' = ΓΒ' \cdot ΓΑ \quad (4) \quad \text{και} \quad ΒΑ \cdot ΒΓ' = ΒΑ' \cdot ΒΓ \quad (5)$$

iii. Οι σχέσεις (3), (4) και (5) γράφονται ισοδύναμα :

$$\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ'}{ΑΒ'} \quad (6), \quad \frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΓΒ'}{ΓΑ'} \quad (7), \quad \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΒΑ'}{ΒΓ'} \quad (8)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις σχέσεις 6, 7 και 8 και έχουμε :

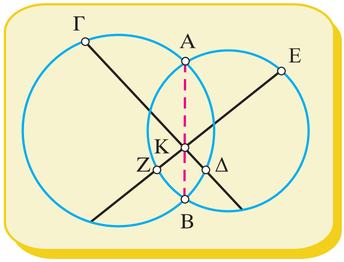
$$\frac{ΑΓ}{ΑΒ} \cdot \frac{ΒΓ}{ΑΓ} \cdot \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΑΓ'}{ΑΒ'} \cdot \frac{ΓΒ'}{ΓΑ'} \cdot \frac{ΒΑ'}{ΒΓ'} = 1$$.Άρα $ΑΓ' \cdot ΓΒ' \cdot ΒΑ' = ΑΒ' \cdot ΓΑ' \cdot ΒΓ'$

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Ασκήσεις που ζητείται να δείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.
Έστω ΑΒΓΔ το ζητούμενο τετράπλευρο και Κ το σημείο των διαγωνίων του ή οποιοδήποτε σημείο εκτός του τετραπλεύρου. Αρκεί να δείχνουμε ότι $ΚΑ \cdot ΚΒ = ΚΓ \cdot ΚΔ$
Η μέθοδος αυτή συμπληρώνει τις σχετικές μεθόδους που σχετίζονται με τα εγράψιμα και εγγεγραμμένα τετράπλευρα.

Παράδειγμα 4

Από ένα σημείο της κοινής χορδής ΑΒ δύο τεμνόμενων κύκλων φέρνουμε δύο ευθείες. Η μία τέμνει τον ένα κύκλο στα Γ και Δ και η άλλη τον άλλο κύκλο στα Ε και Ζ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ, Ε και Ζ ορίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.



Λύση

Έστω Κ το σημείο της κοινής χορδής ΑΒ, τότε ισχύουν:

$$ΚΑ \cdot ΚΒ \;=\; ΚΓ \cdot ΚΔ \qquad (1)$$

(θεωρ. τεμνουσών στον 1ο κύκλο)

$$\text{και } ΚΑ \cdot ΚΒ \;=\; ΚΕ \cdot ΚΖ \quad (2)$$

(θεωρ. τεμνουσών στον 2ο κύκλο)

Από τις (1) και (2) παίρνουμε: $ΚΓ \cdot ΚΔ = ΚΕ \cdot ΚΖ$.

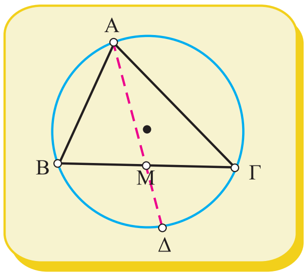
Άρα το τετράπλευρο ΓΕΔΖ είναι εγγράψιμο.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκηση 1

Η προέκταση της διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο Δ. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΔΜ συναρτήσει των πλευρών του τριγώνου.

Λύση



Αφού η ΑΜ είναι διάμεσος ισχύει ΒΜ = ΜΓ.

Ακόμα ισχύει $ΑΜ \cdot ΜΔ = ΜΒ \cdot ΜΓ$ οπότε :

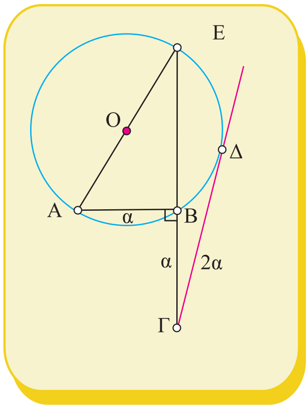
$$ΜΔ = \frac{ΜΒ \cdot ΜΓ}{ΑΜ} = \frac{\frac{α}{2} \cdot \frac{α}{2}}{μ_α} = \frac{α^2}{4μ_α}$$

Επειδή $μ_α{}^2 = \dfrac{2β^2 + 2γ^2 - α^2}{4}$ έχουμε:

$$ΜΔ = \frac{α^2}{2\sqrt{2β^2 + 2γ^2 - α^2}}$$

Άσκηση 2

Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε μια χορδή ΑΒ = α και εκτός του κύκλου φέρνουμε την ημιευθεία Βx κάθετη στην ΑΒ. Επί της Βx θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ = α και φέρουμε ένα εφαπτόμενο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στον κύκλο. Αν ισχύει ΓΔ = 2α, να εκφράσετε την ακτίνα R συναρτήσει του α.



Λύση

Έστω Ε το σημείο που τέμνει η ΓΒ τον κύκλο. Η εγγεγραμμένη γωνία ΑΒΕ είναι ορθή. Επομένως η ΑΕ είναι διάμετρος του κύκλου

Ισχύει $ΓΒ \cdot ΓΕ = ΓΔ^2$. Σύμφωνα με τα δεδομένα παίρνουμε :

$\alpha \cdot (\alpha + BE) = 4\alpha^2$ δηλαδή $\alpha + BE = 4\alpha \Leftrightarrow$
$BE = 4\alpha - \alpha \Leftrightarrow BE = 3\alpha$.
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΕ παίρνουμε :

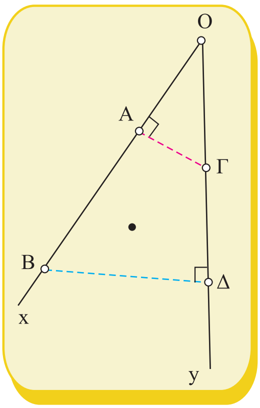
$$AB^2 + BE^2 = AE^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 9\alpha^2 = 4R^2 \Leftrightarrow R = \frac{\alpha\sqrt{10}}{2}.$$

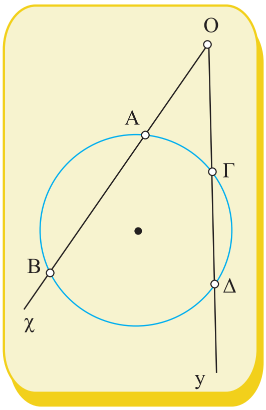
Άσκηση 3

Θεωρούμε μία γωνία xOy και δύο σημεία Α, Β της πλευράς Ox. Να προσδιορίσετε σημεία Γ, Δ της πλευράς Oy τέτοια, ώστε να ισχύει ΟΑ ΟΒ = ΟΓ ΟΔ.

1η Λύση

Από το Α φέρνουμε την κάθετη προς την Ox που τέμνει την Oy στο Γ.
Επίσης από το Β φέρνουμε την κάθετη στην Oy που την τέμνει στο Δ.
Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο γιατί $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^o$ Επομένως τα σημεία Γ, Δ είναι αυτά που ζητάμε.





2η Λύση

Γράφουμε κύκλο που διέρχεται από τα Α, Β. Αυτός τέμνει την Oy στα σημεία Γ, Δ που είναι τα ζητούμενα.

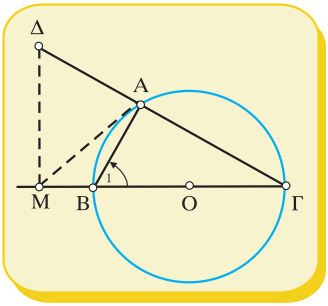
Άσκηση 4

Από το σημείο Μ εκτός κύκλου (Ο, R) φέρνουμε ένα εφαπτόμενο ευθύγραμμο τμήμα ΜΑ και την τέμνουσα ΜΒΓ του κύκλου, η οποία διέρχεται από το κέντρο του. Αν η κάθετη από το Μ προς τη ΜΒ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ να αποδείξετε ότι :

$$\mathbf{A\Gamma \cdot \Gamma\Delta = M\Gamma^2 - MA^2.}$$

Λύση

$M\Gamma^2 - MA^2 = M\Gamma^2 - MB \cdot M\Gamma = M\Gamma \cdot (M\Gamma - MB) = M\Gamma \cdot B\Gamma$.
Επομένως πρέπει να αποδείξουμε ότι $M\Gamma \cdot B\Gamma = A\Gamma \cdot \Gamma\Delta$ (1)
Όμως τα τρίγωνα ΜΓΔ και ΑΓΒ είναι όμοια (είναι ορθογώνια και έχουν τη γωνία Γ κοινή άρα και $B_1 = \Delta$). Επομένως ισχύει $\frac{A\Gamma}{M\Gamma} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$ και συνεπώς $M\Gamma \cdot B\Gamma = A\Gamma \cdot \Gamma\Delta$

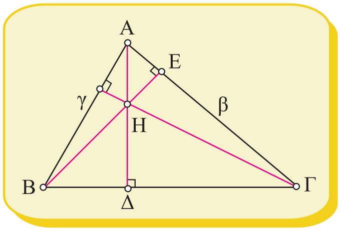


Σημείωση
Για την ισχύ της σχέσης (1) θα μπορούσαμε να επικαλεστούμε την εγγραψιμότητα του τετραπλεύρου ΑΒΜΔ
(Α + Μ = $90^0 + 90^0 = 180^0$)

Άσκηση 5

Αν Η είναι το ορθόκεντρο οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογιστεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ συναρτήσει των πλευρών του τριγώνου.

Λύση



Το τετράπλευρο ΓΔΗΕ είναι εγγράψιμο.
Άρα ΑΗ · ΑΔ = ΑΕ · ΑΓ .
Επίσης η γωνία Α είναι μικρότερη από 90^0, επομένως είναι:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot AE \Leftrightarrow \beta \cdot AE = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\Gamma \cdot AE = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2}$$

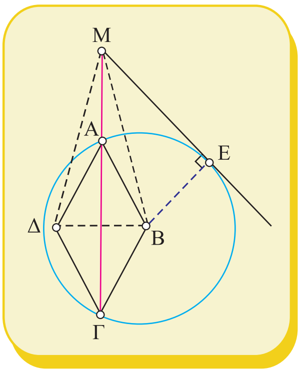
Τότε $AH \cdot A\Delta = AE \cdot A\Gamma \Leftrightarrow AH = \dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2A\Delta} = \dfrac{\alpha\cdot(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)}{4\cdot\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$

αφού για το ύψος ΑΔ ισχύει : $A\Delta = \dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

Άσκηση 6

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ και στην προέκταση της μεγαλύτερης διαγωνίου ΑΓ προς το Α σημείο Μ.
Να δειχθεί ότι $MA \cdot M\Gamma = M\Delta^2 - A\Delta^2$

Λύση



Γράφουμε κύκλο με κέντρο Β και ακτίνα ΒΑ και φέρνουμε το ΜΕ εφαπτόμενο τμήμα τότε ισχύει :

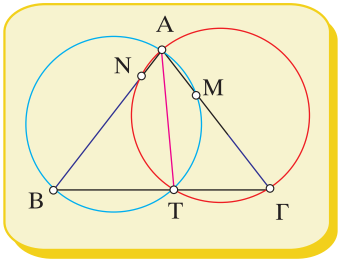
$$MA \cdot M\Gamma = ME^2 \qquad (1)$$

Το τρίγωνο ΜΕΒ είναι ορθογώνιο άρα $ME^2 = MB^2 - BE^2$.
Επίσης ΜΒ = ΜΔ αφού Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΔ και ΒΕ = ΒΑ = ΑΔ.
Επομένως η (1) γράφεται: $MA \cdot M\Gamma = M\Delta^2 - A\Delta^2$

Άσκηση 7

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Τ επί της ΒΓ. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΒΤ και ΑΓΤ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα στα σημεία Μ και Ν, να δειχθεί ότι το άθροισμα ΒΝ + ΓΜ είναι σταθερό, οποιοδήποτε σημείο της βάσης ΒΓ κι αν είναι το Τ.

Λύση



Οι ΝΑ, ΤΓ είναι χορδές του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΤΓ που τέμνονται στο Β και οι ΜΑ, ΤΒ είναι χορδές του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΤ που τέμνονται στο Γ.

Επομένως ισχύουν :

$$ΒΝ \cdot ΒΑ = ΒΤ \cdot ΒΓ \quad (1) \quad \text{και}$$

$$ΓΜ \cdot ΓΑ = ΓΤ \cdot ΓΒ \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη και επειδή είναι ΑΒ = ΑΓ = λ ενώ ΒΓ = α φτάνουμε στη σχέση :

$$λ \cdot (ΒΝ + ΓΜ) = α \cdot (ΒΤ + ΓΤ) \Leftrightarrow λ \cdot (ΒΝ + ΓΜ) = α^2$$

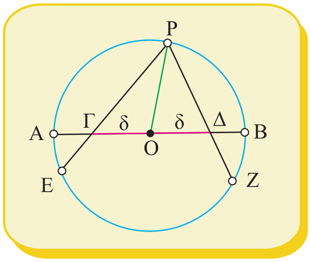
Επομένως $ΒΝ + ΓΜ = \dfrac{α^2}{λ}$, που είναι σταθερό.

Άσκηση 8

Θεωρούμε κύκλο (Ο, R), μία διάμετρο του ΑΒ και σημεία Γ και Δ επί της ΑΒ τέτοια ώστε ΟΓ = ΟΔ = δ. Αν Ρ είναι τυχαίο σημείο του κύκλου (Ο, R) και Ε, Ζ τα σημεία τομής των ΡΓ και ΡΔ με τον κύκλο, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α. $ΔΖ = \dfrac{R^2 - δ^2}{ΔΡ}$ **και** $ΓΕ = \dfrac{R^2 - δ^2}{ΓΡ}$ **β.** $\dfrac{ΓΡ}{ΓΕ} + \dfrac{ΔΡ}{ΔΖ} =$ σταθερό

Λύση



α. Είναι : $ΔΖ \cdot ΔΡ = ΔΒ \cdot ΔΑ = (R - δ)(R + δ) = R^2 - δ^2$

οπότε $ΔΖ = \dfrac{R^2 - δ^2}{ΔΡ}$ (1)

Επίσης είναι :

$ΓΕ \cdot ΓΡ = ΑΓ \cdot ΓΒ = (R - δ)(R + δ) = R^2 - δ^2$ οπότε

$$ΓΕ = \frac{R^2 - δ^2}{ΓΡ} \quad (2)$$

β. Σύμφωνα με τις σχέσεις (1) και (2) του πρώτου ερωτήματος έχουμε

$$\frac{ΓΡ}{ΓΕ} + \frac{ΔΡ}{ΔΖ} = \frac{ΓΡ}{\dfrac{R^2 - δ^2}{ΓΡ}} + \frac{ΔΡ}{\dfrac{R^2 - δ^2}{ΔΡ}} = \frac{ΓΡ^2}{R^2 - δ^2} + \frac{ΔΡ^2}{R^2 - δ^2} = \frac{ΓΡ^2 + ΔΡ^2}{R^2 - δ^2}$$

Όμως είναι $ΓΡ^2 + ΔΡ^2 = 2ΟΡ^2 + \dfrac{ΓΔ^2}{2} = 2R^2 + 2δ^2$, διότι η ΟΡ είναι η διάμεσος στο τρίγωνο ΓΔΡ. Συνεπώς $\dfrac{ΓΡ}{ΓΕ} + \dfrac{ΔΡ}{ΔΖ} = \dfrac{2R^2 + 2δ^2}{R^2 - δ^2}$, που είναι σταθερό.

Άσκηση 9

Από σημείο Ρ εκτός κύκλου φέρνουμε εφαπτόμενη ΡΑ και τυχαία τέμνουσα ΡΒΓ του κύκλου. Να αποδειχθούν :

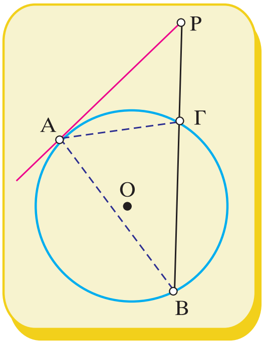
α. Το τρίγωνο ΡΑΒ είναι όμοιο με το ΡΓΑ **β.** $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}=\frac{PB}{P\Gamma}$

Λύση

α. Τα τρίγωνα ΡΑΒ και ΡΓΑ είναι όμοια διότι έχουν :

$\hat{P}=\hat{P}$ (κοινή γωνία).

$\widehat{PA\Gamma}=\widehat{AB\Gamma}=\omega$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτόμενης ισούται αντίστοιχη εγγεγραμμένη γωνία)



β. Αφού τα τρίγωνα ΡΑΒ και ΡΓΑ είναι όμοια προκύπτει η αναλογία

$$\frac{PB}{PA}=\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{PA}{P\Gamma}$$

από όπου παίρνουμε $PA^2=PB\cdot P\Gamma$ οπότε

$$\left(\frac{AB}{A\Gamma}\right)^2=\left(\frac{PB}{PA}\right)^2=\frac{PB^2}{PA^2}=\frac{PB^2}{PB\cdot P\Gamma}=\frac{PB}{P\Gamma}$$

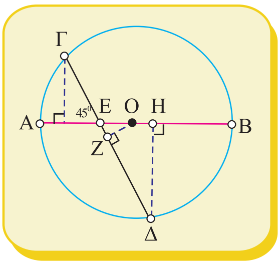
Άσκηση 10

Θεωρούμε κύκλο (Ο, R) και μία διάμετρο του ΑΒ. Γράφουμε χορδή ΓΔ του κύκλου που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε έτσι ώστε $\widehat{AE\Gamma}=45^0$.

Να αποδείξετε ότι :

$AE\cdot EB+2OZ^2=R^2$, όπου Ζ η προβολή του Ο στη ΓΔ.

Λύση



Ισχύει $AE\cdot EB=R^2-OE^2$ δηλαδή

$$AE\cdot EB+OE^2=R^2 \quad (1)$$

Το τρίγωνο ΕΖΟ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, επομένως ισχύει $EZ=ZO$ και από το πυθαγόρειο θεώρημα είναι

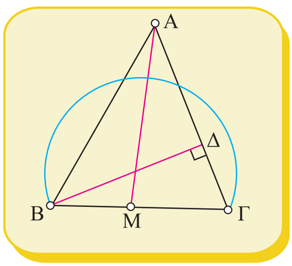
$$OE^2=EZ^2+ZO^2=2ZO^2.$$

Άρα η (1) γίνεται $AE\cdot EB+2ZO^2=R^2$.

Άσκηση 11

Αν Μ είναι το μέσον της πλευράς ΒΓ οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ και ΒΔ το ύψος του, να αποδείξετε ότι $AM^2=BM^2+A\Delta\cdot A\Gamma$.

Λύση



Ο κύκλος με διάμετρο ΒΓ (δηλαδή με κέντρο το μέσον Μ τις ΒΓ και ακτίνα $\frac{B\Gamma}{2}$) τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ διότι $B\hat{\Delta}\Gamma=90^o$ και αναγκαστικά το Δ ανήκει στον κύκλο διαμέτρου ΒΓ. Τότε

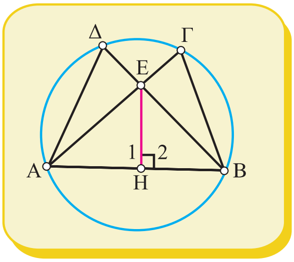
$$A\Delta\cdot A\Gamma=AM^2-R^2=AM^2-BM^2 \quad (\text{διότι } R=\frac{B\Gamma}{2}=BM).$$

Άρα $AM^2=A\Delta\cdot A\Gamma+BM^2$.

Άσκηση 12

Δίνεται κύκλος (Ο, R) διαμέτρου ΑΒ. Δύο χορδές του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ε (Ε εσωτερικό του κύκλου), να δείξετε ότι $ΑΕ \cdot ΑΓ + ΒΕ \cdot ΒΔ = ΑΒ^2$

Λύση



Από το Ε φέρνουμε ΕΗ κάθετη στην ΑΒ. Φέρνουμε επίσης τις χορδές ΑΔ και ΒΓ. Το τετράπλευρο ΑΔΕΗ είναι εγγράψιμο $\left(\hat{H}_1 = \hat{Δ} = 90^o\right)$. Άρα $ΒΕ \cdot ΒΔ = ΒΗ \cdot ΒΑ$ (1)

Το τετράπλευρο ΒΓΕΗ είναι εγγράψιμο $\left(\hat{H}_2 = \hat{Γ} = 90^o\right)$. Άρα

$ΑΕ \cdot ΑΓ = ΑΗ \cdot ΑΒ$ (2)

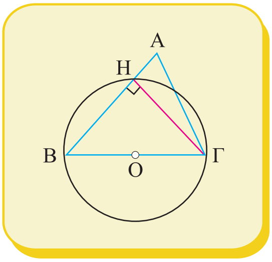
Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε:

$$ΑΕ \cdot ΑΓ = ΒΕ \cdot ΒΔ = ΑΗ \cdot ΑΒ + ΒΗ \cdot ΑΒ = (ΑΗ + ΒΗ) \cdot ΑΒ = ΑΒ \cdot ΑΒ = ΑΒ^2.$$

Άσκηση 13

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 11, ΑΓ = 9, ΒΓ = 10 και ΓΗ ύψος του. Να υπολογισθεί η δύναμη του σημείου Α ως προς τον περιγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΒΓΗ.

Λύση



Η γωνία $\hat{H}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και ορθή. Επομένως βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε η ΒΓ είναι διάμετρος, που σημαίνει R = 5. Έστω $Δ^{Α}_{(Ο,R)}$ η δύναμη του σημείου Α ως προς τον κύκλο (Ο, R).

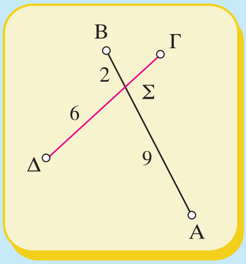
Είναι $Δ^{P}_{(O,R)} = δ^2 - R^2$ (όπου δ = ΑΟ).

Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ η ΑΟ είναι διάμεσος, οπότε σύμφωνα με τον τύπο που μας δίνει τη διάμεσο συνάρτησει των πλευρών του τριγώνου έχουμε:

$$ΑΟ^2 = \frac{2ΑΒ^2 + 2ΑΓ^2 - ΒΓ^2}{4} = \frac{2 \cdot 121 + 2 \cdot 81 - 100}{4} \Leftrightarrow ΑΟ = \sqrt{76}.$$

Οπότε $Δ^{Α}_{(O,R)} = δ^2 - R^2 = 76 - 25 = 51$

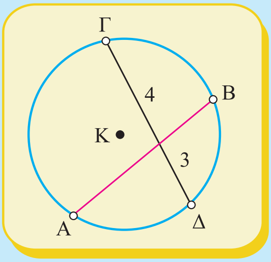
Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ



1. Στο διπλανό σχήμα είναι ΣΑ = 2cm, ΣΒ = 9cm, ΣΔ = 6cm. Για να είναι ομοκυκλικά τα σημεία Α, Γ, Β και Δ το ΓΣ πρέπει να ισούται με :

Α. $\frac{6}{9}$ **Β.** $\frac{6 \cdot 9}{2}$ **Γ.** $\frac{2 \cdot 6}{2}$ **Δ.** $\frac{15}{2}$ **Ε.** 3

2. Στο διπλανό σχήμα είναι ΟΓ = 4cm, ΟΔ = 3cm και $ΟΒ = \frac{ΟΑ}{3} = x$. Η τιμή του x είναι ίση με 2cm. Είναι η παραπάνω πρόταση σωστή ή λάθος;



3. Αν δύο χορδές κύκλου τέμνονται σε μέρη ανάλογα, να αποδείξετε ότι είναι ίσες.

4. Σε κύκλο (Ο, R) είναι εγγεγραμμένο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Από το Α φέρνουμε τυχούσα ευθεία η οποία τέμνει την ΒΓ στο Δ και τον κύκλο στο Ε. Να δείξετε ότι:

α. $ΑΒ^2 = ΑΔ \cdot ΑΕ$

β. Ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Β, Δ, Ε εφάπτεται στην ΑΒ.

5. Σε κύκλο ακτίνας R = 15 cm θεωρούμε σημείο Γ που απέχει από το κέντρο του κύκλου 10 cm. Φέρνουμε χορδή ΑΒ που διέρχεται από το Γ έτσι ώστε να είναι ΑΓ = 3ΓΒ. Να βρεθεί το μήκος της χορδής.

6. Κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν οι προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ρ και ΡΑ = 9cm, ΡΒ = 10cm και ΡΓ = 15cm, να υπολογιστεί η πλευρά ΓΔ και η εφαπτόμενη ΡΣ του κύκλου.

7. Θεωρούμε κύκλο (Ο, R), μία σταθερή διάμετρο του ΑΒ και μία σταθερή ευθεία (ε) κάθετη στην ΑΒ. Αν η ευθεία (ε) τέμνει τυχαία χορδή ΑΓ του κύκλου στο σημείο Σ, να αποδείξετε ότι το γινόμενο $ΑΣ \cdot ΑΓ$ είναι σταθερό.

8. Αν Η είναι το ορθόκεντρο οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ με ύψη ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ να αποδειχθούν:

α. $ΑΗ \cdot υ_α = ΑΖ \cdot γ = ΑΕ \cdot β$

β. $ΒΗ \cdot υ_β + ΓΗ \cdot υ_γ = α^2$

γ. $ΑΗ \cdot υ_α + ΒΗ \cdot υ_β + ΓΗ \cdot υ_γ = \frac{1}{2}(α^2 + β^2 + γ^2)$.

9. Σε κύκλο (Ο,R) θεωρούμε τη χορδή ΑΒ. Σημείο Ρ μετακινείται πάνω στη χορδή. Η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο γίνεται μέγιστη όταν:

α. το Ρ είναι ένα από τα άκρα Α και Β.

β. το Ρ είναι μέσο της ΑΒ.

γ. οποιοδήποτε σημείο της ΑΒ.

δ. το Ρ διαιρεί το ΑΒ σε μέσο και άκρο λόγο.

ε. κανένα από τα παραπάνω.

10. Δίνεται κύκλο, με κέντρο Κ και ακτίνα 20cm. Ένα σημείο Α απέχει από το κέντρο Κ, 52cm. Από το Α φέρνουμε εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ προς τον κύκλο. Να υπολογίσετε το τμήμα ΑΒ.

11. Δύο κύκλοι (κ, ρ) και (Λ, R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Από τυχαίο σημείο Μ του πρώτου φέρνουμε εφαπτομένη ΜΒ στον δεύτερο κύκλο. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{MB}{MA}=\sqrt{1+\frac{R}{\rho}}$$

12. Από σημείο Δ πλευράς ΒΓ, τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε κάθετη προς τη διάμετρο ΑΟΖ του περιγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Να απόδείξετε ότι: $AB^2+A\Gamma^2=4\cdot R\cdot AE$ (όπου R η ακτίνα του περιγγεγραμμένου κύκλου).

13. Αν Μ μέσον της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και ΒΕ το ύψος του, να αποδείξετε ότι, αν $\hat{A}<90^o$ τότε $MA^2-MB^2=AE\cdot A\Gamma$.

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Οι περιγγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΒΖ = ΓΕ.

15. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, Μ και Ν, το βαρύκεντρο Θ και η κορυφή Α είναι ομοκυκλικά (ΑΜΘΝ εγγράψιμο). Να αποδείξετε ότι $\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2$.

Ε "ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ"

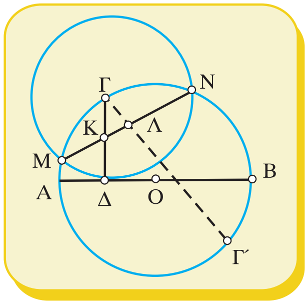
1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $2\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$. Αν Μ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου, να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Μ, Β εφάπτεται της ΒΓ στο Β.

(**Υπ**: Θεωρούμε τη διάμεσο $\mu_\alpha=A\Delta$. Τότε $\mu_\alpha=\ldots=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ $\Delta M\cdot\Delta A=\frac{1}{3}\mu_\alpha\cdot\mu_\alpha=\frac{\alpha^2}{4}=\Delta B^2$)

2. Δίνεται κύκλος (Ο, R) με διάμετρο ΑΒ και Γ τυχαίο σημείο του. Θεωρούμε την προβολή Δ του σημείου Γ στην ΑΒ και κατασκευάζουμε κύκλο (Γ, ΓΔ), που τέμνει τον κύκλο (Ο, R) στα σημεία Μ και Ν. Να αποδείξετε ότι η ΜΝ διχοτομεί το τμήμα ΓΔ.

(**Υπ**: Δικαιολογείστε ότι το ΚΛΟΔ είναι εγγράψιμο.

Τότε $\Gamma K\cdot\Gamma\Delta=\Gamma\Lambda\cdot\Gamma O=\Gamma\Lambda=\frac{\Gamma\Gamma'}{2}=\frac{N\Gamma^2}{2}$)



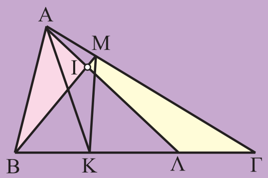
3. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ, ΒΕ που τέμνονται στο Η.
Να αποδείξετε ότι : **ΑΒ = ΒΗ · ΒΕ + ΑΗ · ΑΔ**

(**Υπ**: $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = 2ΒΓ \cdot ΓΔ$. ΑΒΔΕ εγγράψιμο (;) ΒΓ· ΓΔ = ΑΓ · ΓΕ. Άρα:
$ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2 - ΒΓ \cdot ΓΔ - ΒΓ \cdot ΓΔ = ΑΓ^2 + ΒΓ^2 - ΒΓ \cdot ΓΔ - ΓΑ \cdot ΓΕ =$
$ΒΓ \cdot (ΒΓ - ΓΔ) + ΑΓ \cdot (ΑΓ - ΓΕ)$.
Το τετράπλευρο ΓΕΔΗ είναι εγγράψιμο (;) ΑΓ · ΑΕ = ΑΔ · ΑΗ, ΒΓ · ΒΔ = ΒΕ · ΒΗ)

3ο Κεφάλαιο

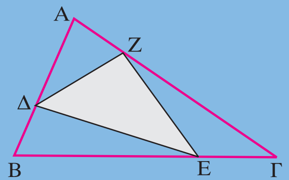
7ο μάθημα

Εμβαδά επιπέδων σχημάτων



8ο μάθημα

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου
Λόγος εμβαδών ομοίων τριγώνων - πολυγώνων



Μάθημα 7

Εμβαδά επιπέδων σχημάτων

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός 1

Πολυγωνικό χωρίο ονομάζουμε κάθε πολύγωνο μαζί με τα εσωτερικά του σημεία.

Ορισμός 2

Εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου S ονομάζεται ο θετικός αριθμός λ όπου $S = λ·σ$ και σ ένα άλλο πολυγωνικό χωρίο, το οποίο λαμβάνουμε ως μονάδα μέτρησης.
Το εμβαδόν ενός πολυγώνου, π.χ ενός τριγώνου ΑΒΓ συμβολίζεται (ΑΒΓ) ή $E_{ΑΒΓ}$.

Ορισμός 3

Ίσα πολυγωνικά χωρία ονομάζονται τα χωρία που έχουν ίσα αντίστοιχα πολύγωνα.

Ορισμός 4

Ισοδύναμα ή ισεμβαδικά ονομάζονται τα σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν.
Δύο ισοδύναμα σχήματα έχουν την ίδια έκταση χωρίς να έχουν την ίδια μορφή. Εννοείται ότι δύο ισοδύναμα σχήματα δεν είναι απαραίτητο να είναι ίσα

Αξίωμα 1

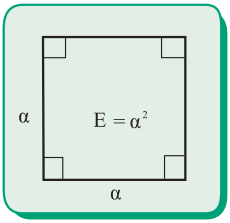
Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.

Αξίωμα 2

Αν ένα πολυγωνικό χωρίο χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων.

Αξίωμα 3

Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1μονάδας είναι 1τετραγωνική μονάδα.

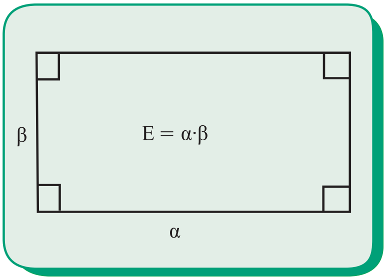


Θεώρημα 1

Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α είναι $α^2$, δηλαδή $E = α^2$.

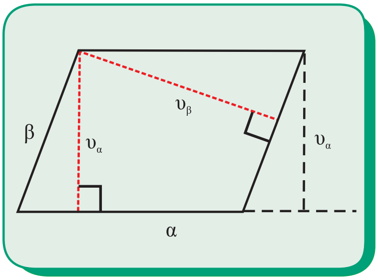
Θεώρημα 2
Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του, δηλαδή

$$E = \alpha \cdot \beta$$



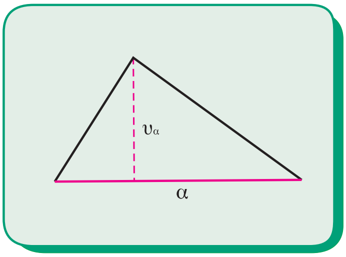
Θεώρημα 3
Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μίας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά αυτή, δηλαδή

$$E = \alpha \cdot \upsilon_\alpha = \beta \cdot \upsilon_\beta$$



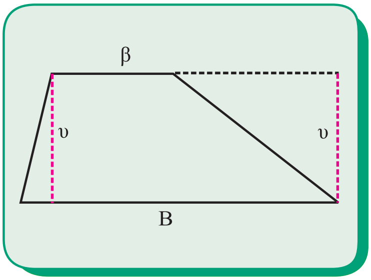
Θεώρημα 4
Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος, δηλαδή

$$E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$$



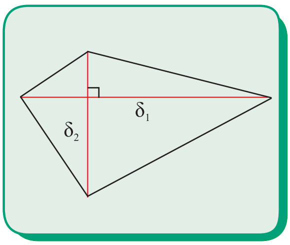
Θεώρημα 5
Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του, δηλαδή

$$E = \frac{\beta + B}{2} \cdot \upsilon$$



Θεώρημα 6
Το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου με κάθετες διαγώνιες ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του, δηλαδή

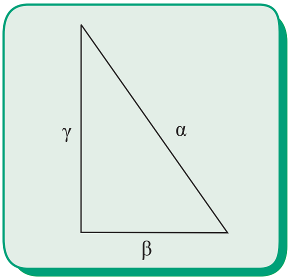
$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$



Πόρισμα 1

Το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο των κάθετων πλευρών του, δηλαδή

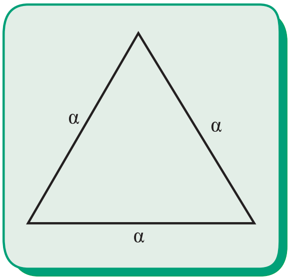
$$E = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma$$



Πόρισμα 2

Το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α δίνεται από τη σχέση :

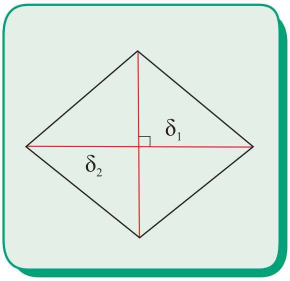
$$E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$



Πόρισμα 3

Το εμβαδόν ενός ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του, δηλαδή :

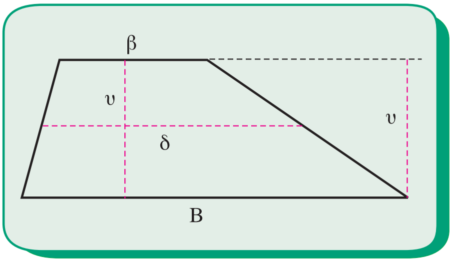
$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$



Πόρισμα 4

Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του, δηλαδή είναι

$$E = \delta \cdot \upsilon$$



Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

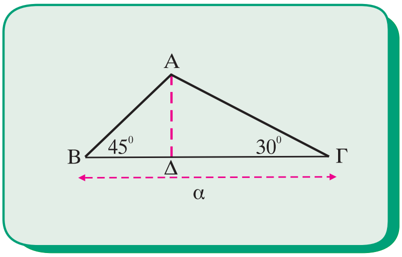
Κατηγορία - Μέθοδος 1

Υπολογιστικές ασκήσεις. Ασκήσεις δηλαδή που μας ζητούν να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός σχήματος. Απλή εφαρμογή των τύπων της θεωρίας.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ, όταν ΒΓ= α , $\hat{\Gamma} = 30^0$ και $\hat{B} = 45^0$.

Λύση



Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο φέρουμε το ύψος ΑΔ. Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο με $\hat{B} = 45^0$ και $\hat{A}_1 = 45^0$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Άρα ΑΔ = ΒΔ.

Στο τρίγωνο ΑΔΓ είναι Γ = 30^0 οπότε ΑΓ = 2ΑΔ.
Απο το Π.Θ στο ΑΔΓ παίρνουμε :

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ ή $(2A\Delta)^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 \Leftrightarrow$

$4A\Delta^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 \Leftrightarrow \Delta\Gamma^2 = 3A\Delta^2 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = A\Delta\sqrt{3}$.

Είναι $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma \Leftrightarrow \alpha = A\Delta + A\Delta\sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = (1+\sqrt{3})A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = \dfrac{\alpha}{1+\sqrt{3}}$.

Επομένως $(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2} A\Delta\, B\Gamma = \dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha}{1+\sqrt{3}}\alpha = \dfrac{\alpha^2}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}$.

Κατηγορία - Μέθοδος 2

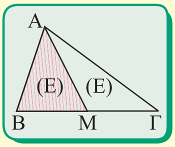
Όταν μας ζητούν να δείξουμε ότι δύο πολυγωνικά χωρία είναι ισοδύναμα ή να δείξουμε μια σχέση μεταξύ των εμβαδών δύο πολυγωνικών χωρίων:

α. Χωρίζουμε τα πολυγωνικά χωρία, των οποίων ζητείται το εμβαδόν σε επιμέρους τμήματα και προσπαθούμε να βρούμε σχέση μεταξύ των εμβαδών αυτών των τμημάτων. Για ευκολία μπορούμε να συμβολίζουμε με όμοια γράμματα τα ισοδύναμα χωρία. (βλέπε παράδειγμα 2).

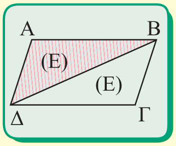
β. Βρίσκουμε, αν υπάρχουν κοινά πολυγωνικά χωρία και αποδεικνύουμε, ότι τα μη κοινά τους χωρία είναι ισοδύναμα. (βλέπε παράδειγμα 3)

γ. Χρησιμοποιούμε τις επόμενες τρεις βασικές προτάσεις

1. Αν ΑΜ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ τότε: (ΑΒΜ) = (ΑΜΓ) δηλαδή ότι η διάμεσος τριγώνου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.

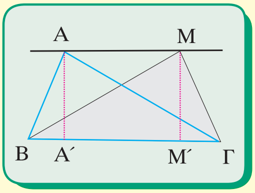


2. Η διαγώνιος παραλληλογράμμου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.



3. Κάθε τρίγωνο με κορυφή σε ευθεία παράλληλη προς τη βάση, ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ έχει το ίδιο εμβαδόν με το ΑΒΓ, διότι: Τα τρίγωνα ΜΒΓ και ΑΒΓ έχουν κοινή βάση ΒΓ και ίσα τα αντίστοιχα ύψη τους ΑΑ΄, ΜΜ΄, αφού ε || ΒΓ .

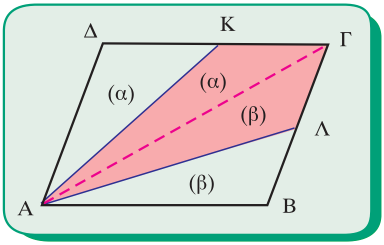
Άρα $(ΜΒΓ) = (ΑΒΓ)$.



Παράδειγμα 2

Σ' ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ συνδέουμε την κορυφή Α με τα μέσα Κ, Λ των πλευρών ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

$$(ΑΒΓΔ) = 2(ΑΚΓΛ)$$



Λύση

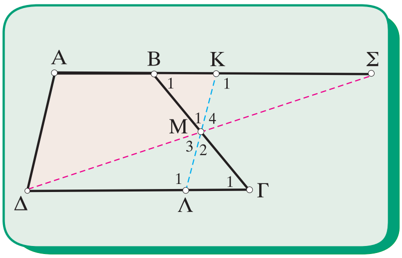
Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος τριγώνου, χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.
Στα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΓ οι ΑΚ και ΑΛ αντίστοιχα είναι διάμεσοι.
Οπότε: $(ΑΚΔ) = (ΑΚΓ) = α$ και $(ΑΓΛ) = (ΑΛΒ) = β$
Είναι: $(ΑΒΓΔ) = 2α + 2β = 2(α + β) = 2(ΑΚΓΛ)$.

Παράδειγμα 3

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η παράλληλη από το Μ προς την ΑΔ τέμνει τις βάσεις στα Κ,Λ και η ευθεία ΔΜ την ΑΒ στο Σ, να αποδειχθεί, ότι το παραλληλόγραμμο ΑΚΛΔ και το τρίγωνο ΔΑΣ είναι ισοδύναμα.

Λύση

Το παραλληλόγραμμο ΑΚΛΔ και το τρίγωνο ΔΑΣ έχουν κοινό το τετράπλευρο ΑΚΜΔ.
Αρκεί να δείξουμε επομένως ότι τα μη κοινά τους χωρία είναι ισοδύναμα. Δηλαδή ότι $(ΔΜΛ) = (ΚΜΣ)$.



Τα τρίγωνα ΒΚΜ και ΜΛΓ είναι ίσα διότι έχουν :

$ΒΜ = ΜΓ$ (υπόθεση)

$Β_1 = Γ_1$ (εντός εναλλαξ)

$Μ_1 = Μ_2$ (κατακορυφήν)

Επομένως $ΚΜ = ΜΛ$ (1)

Επίσης τα τρίγωνα ΔΜΛ και ΚΜΣ είναι ίσα διότι :

ΚΜ = ΜΛ από (1)

$M_3 = M_4$ (κατά κορυφήν)

$K_1 = \Lambda_1$ (εντός εναλλάξ)

Αφού τα τρίγωνα ΔΜΛ και ΚΜΣ είναι ίσα, θα είναι και ισοδύναμα.
Έτσι (ΔΜΛ) = (ΚΜΣ).

Κατηγορία - Μέθοδος 3

Αλγεβρικές ασκήσεις στις οποίες συνήθως καλούμαστε να αποδείξουμε μια ανισότητα. Οι ασκήσεις αυτές λύνονται με χρήση των ιδιοτήτων των ανισοτήτων, των ταυτοτήτων και κάποιες φορές με χρήση της τριγωνικής ανισότητας.

Παράδειγμα 4

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι ισχύει : $E_{ΑΒΓ} < \frac{(\beta+\gamma)^2}{4}$ **.**

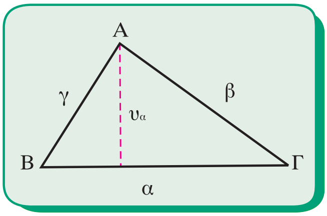
Λύση

Είναι $E_{ΑΒΓ} = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$. Όμως $\alpha < \beta + \gamma$ (1), λόγω της τριγωνικής ανισότητας και

$\upsilon_\alpha < \beta$ (2), $\upsilon_\alpha < \gamma$ (3).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2) και (3) παίρνουμε :

$$\upsilon_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2} \quad (4).$$



Τώρα με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1) και (4) έχουμε :

$$\alpha\upsilon_\alpha < \frac{(\beta+\gamma)^2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha < \frac{(\beta+\gamma)^2}{4} \Leftrightarrow E_{ΑΒΓ} < \frac{(\beta+\gamma)^2}{4}$$

Κατηγορία - Μέθοδος 4

Όταν ζητείται σχέση λόγων ή γινομένων , η σκέψη μας πηγαίνει πρώτα στο θεώρημα του Θαλή ή στα όμοια τρίγωνα. Όμως , όταν δεν μπορούμε να αποδείξουμε ομοιότητα τριγώνων , καταφεύγουμε στη χρήση τύπων εμβαδών (βλέπε παράδειγμα 1).

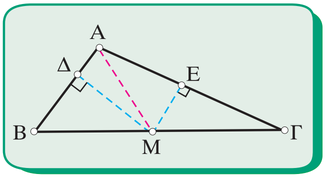
Παράδειγμα 5

Σε τρίγωνο ΑΒΓ έστω ΑΜ η διάμεσος. Να δείξετε ότι οι αποστάσεις του Μ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τις πλευρές αυτές.

Λύση

Επειδή ΑΜ διάμεσος είναι (ΑΒΜ) = (ΑΜΓ). Έχουμε:

$$(\mathrm{AB M})=(\mathrm{AM\Gamma})\Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{M\Delta}=\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{ME}\Leftrightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{ME}}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{M\Delta}}$$



Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθεί το εμβαδόν τριγώνου με πλευρές ΑΒ = κ, ΑΓ = 3κ και Α =120° και να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου, που είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

Λύση

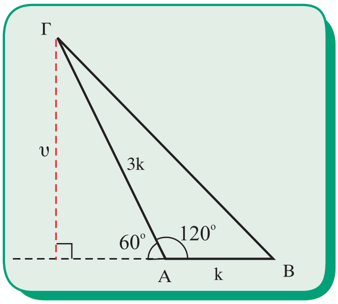
Είναι :

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\cdot k\cdot 3k\cdot \eta\mu 60^0=\frac{1}{2}\cdot k\cdot 3k\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3k^2\sqrt{3}}{4}$$

όπου $\upsilon = 3\kappa\eta\mu 60^0$.

Το εμβαδόν τετραγώνου δίνεται απο τη σχέση $E = \alpha^2$, όπου α η πλευρά του. Το τετράγωνο επομένως είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο αν ισχύει :

$$\alpha^2=\frac{3k^2\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow \alpha=\frac{k\sqrt{3\sqrt{3}}}{2}$$



Άσκηση 2

Το ύψος ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α ισούται με το ύψος ενός τραπεζίου. Αν το άθροισμα των βάσεων του τραπεζίου είναι 10 μέτρα και το τραπέζιο είναι ισοδύναμο με το ισόπλευρο τρίγωνο να βρεθούν :

α. η πλευρά α του ισοπλεύρου τριγώνου

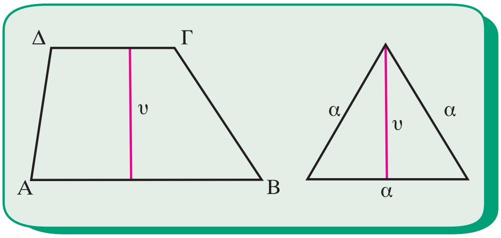
β. το εμβαδόν του τραπεζίου

Λύση

Το ύψος ενός ισοπλεύρου τριγώνου δίνεται από τη σχέση $\upsilon=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου είναι:

$$E=\frac{\mathrm{AB}+\Gamma\Delta}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{10}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{5\alpha\sqrt{3}}{2}$$



Επειδή το τραπέζιο είναι ισοδύναμο με το ισόπλευρο τρίγωνο έχουμε :

α. $\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{5\alpha\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \alpha=10$ μέτρα και **β.** $E=\dfrac{5\cdot 10\sqrt{3}}{2}=25\sqrt{3}$.

Άσκηση 3

Αν η πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 4 m, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 136 m^2. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου αυτού.

Λύση

Έστω τετράγωνο πλευράς x. Το εμβαδόν του είναι x^2 Αν η πλευρά του αυξηθεί κατά 4 γίνεται x + 4 και το εμβαδόν του γίνεται $(x + 4)^2$.

Η αύξηση του εμβαδού είναι $(x + 4)^2 - x^2$. Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης αυτή η αύξηση είναι 136.

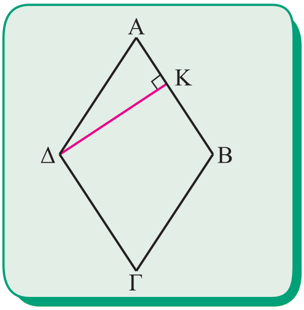
Έτσι φτιάχνουμε την ισότητα: $(x+4)^2 - x^2 = 136 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 - x^2 = 136 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x = 120 \Leftrightarrow x = 15\,\text{m}$

Άσκηση 4

Η περίμετρος ενός ρόμβου ΑΒΓΔ είναι 36 cm και η απόσταση των δύο απέναντι πλευρών του είναι 5 cm. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ρόμβου.

Λύση



Αφού η περίμετρος του ρόμβου είναι 36 cm η κάθε πλευρά του είναι $\frac{36\,\text{cm}}{4} = 9$ cm.

Η απόσταση των δύο πλευρών του είναι το ύψος του ρόμβου. Αφού λοιπόν γνωρίζουμε την πλευρά του και το ύψος του, για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του, χρησιμοποιούμε τον τύπο του εμβαδού του παραλληλογράμμου. Δηλ. Ε = βάση · ύψος.

Επομένως (ΑΒΓΔ) = ΑΒ·ΔΚ = 9·5 = 45.

Άρα το εμβαδόν είναι 45 cm^2.

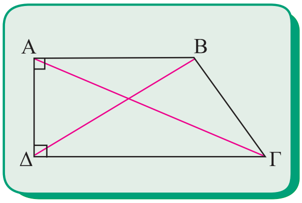
Προσοχή!

Ο ρόμβος είναι και παραλληλόγραμμο. Επομένως για τον υπολογισμό του εμβαδού του, μπορούμε να χρησιμοποιούμε είτε τον τύπο του εμβαδού του παραλληλογράμμου είτε του ρόμβου.

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί το εμβαδό κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αν είναι ΑΒ = 8, ΑΓ = 12, ΑΔ = 6, $ΓΔ = 6\sqrt{3}$ και ΒΔ = 10

Λύση



Είναι $ΑΒ^2 + ΑΔ^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 =$

$10^2 = ΒΔ^2 \Leftrightarrow \hat{Α} = 90^0$

$ΔΓ^2 + ΑΔ^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 = 108 + 36 = 144 =$

$= 12^2 = ΑΓ^2 \Leftrightarrow \hat{Δ} = 90^0$

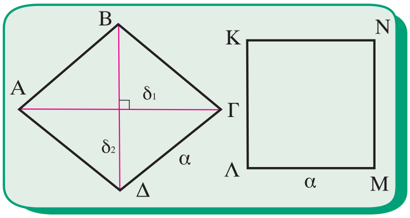
Άρα το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο τραπέζιο. Για το εμβαδό του ισχύει:

$$E = \frac{(AB+\Gamma\Delta)\cdot A\Delta}{2} = \frac{\left(8+6\sqrt{3}\right)\cdot 6}{2} = 3\left(8+6\sqrt{3}\right).$$

Άσκηση 6

Αν ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ είναι ρόμβος πλευράς α και τετράγωνο πλευράς α αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εμβαδον του ρόμβου είναι μικρότερο ή ίσο του εμβαδού του τετραγώνου.

Λύση



Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του και ότι το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α ισούται με α^2 Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha^2 \geq \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2$

Στο ρόμβο : $\alpha^2 = \left(\frac{1}{2}\delta_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\delta_2\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\delta_1^{\ 2}+\delta_2^{\ 2}\right)$

Όμως από την άλγεβρα είναι γνωστό ότι για κάθε x και y ισχύει :

$x^2 + y^2 \geq 2xy$, επομένως $\delta_1^{\ 2}+\delta_2^{\ 2} \geq 2\delta_1\delta_2$ και λόγω της παραπάνω σχέσης είναι :

$$\alpha^2 = \frac{1}{4}\left(\delta_1^{\ 2}+\delta_2^{\ 2}\right) \geq \frac{1}{4}2\delta_1\delta_2 = \frac{\delta_1\delta_2}{2}.$$

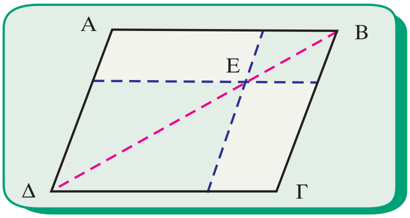
Άρα $\alpha^2 \geq \frac{\delta_1\delta_2}{2}$

Άσκηση 7

Από ένα σημείο Ε της διαγωνίου ΒΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Να δείξετε ότι τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται εκατέρωθεν της ΒΔ είναι ισοδύναμα.

Λύση

Ως γνωστό η διαγώνιος παραλληλογράμμου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Έτσι έχουμε:



Το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ που χωρίζεται από τη διαγώνιό του στα ισοδύναμα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ. Είναι (ΑΒΔ) = (ΒΓΔ) (1).

Ομοίως στο παραλληλόγραμμο ΚΕΝΔ είναι:

(ΚΕΔ) = (ΔΕΝ) (2)

και στο παραλληλόγραμμο ΜΕΛΒ είναι:

(ΜΕΒ) = (ΒΕΛ) (3)

Αφαιρώντας από την (1) τις (2) και (3) έχουμε:

(ΑΒΔ) - (ΚΕΔ) - (ΜΕΒ) = (ΒΓΔ) - (ΔΕΝ) - (ΒΕΛ) ή (ΚΑΜΕ) = (ΝΕΛΓ).

Άσκηση 8

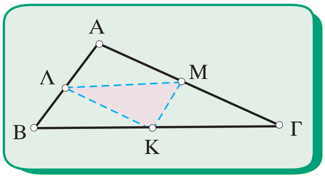
α. Σε τρίγωνο ΑΒΓ έστω Κ,Λ,Μ τα μέσα των πλευρών ΒΓ,ΑΒ,ΑΓ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΛΜ, ΒΛΚ , ΓΚΜ , ΚΛΜ , είναι ισοδύναμα.

β. Να αποδειχθεί, ότι κάθε τετράπλευρο έχει διπλάσιο εμβαδόν από το παραλληλόγραμμο, που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών του.

γ. Αν δύο τετράπλευρα έχουν κοινά τα μέσα των πλευρών τους, να δειχθεί, ότι είναι ισοδύναμα.

δ. Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου είναι ίσες, να δειχθεί, ότι το εμβαδόν του είναι ίσο με το γινόμενο των τμημάτων, που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του.

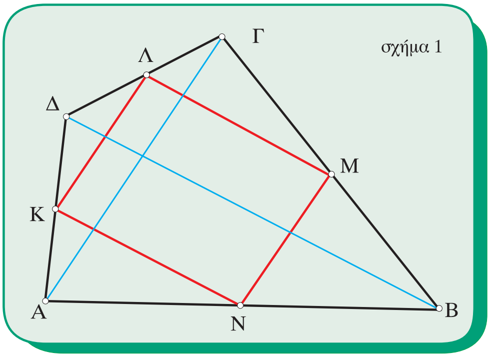
Λύση



α. Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα ΛΜ//ΒΓ (γιατί ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών του τριγώνου). Ομοίως ΚΜ//ΑΒ. Επομένως το ΛΜΚΒ είναι παραλληλόγραμμο. Χωρίζεται δε από τη διαγώνιό του ΛΚ σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Δηλ. (ΚΛΒ) = (ΚΛΜ).
Τα ΛΜΓΚ και ΛΚΜΑ είναι επίσης παραλληλόγραμμα και χωρίζονται και αυτά από τις διαγωνίους τους σε ισοδύναμα τρίγωνα.

Επομένως: $(ΒΛΚ) = (ΓΚΜ) = (ΑΛΜ) = (ΚΛΜ) = \frac{1}{4}(ΑΒΓ)$.

Ενώνοντας λοιπόν τα τρία μέσα των πλευρών ενός τριγώνου, το χωρίζουμε σε 4 ισοδύναμα τρίγωνα.



β. Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΚΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα το τρίγωνο ΑΚΝ έχει εμβαδόν το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΔ

δηλαδή : $(ΑΚΝ)= \frac{1}{4}(ΑΒΔ)$

Ομοίως είναι : $(ΓΛΜ)= \frac{1}{4}(ΓΒΔ)$

$(ΒΜΝ)= \frac{1}{4}(ΑΒΓ)$

$(ΔΚΛ)= \frac{1}{4}(ΑΓΔ)$

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη , παίρνουμε :

$(ΑΚΝ)+(ΓΛΜ)+(ΒΜΝ)+(ΔΚΛ)= \frac{1}{4}((ΑΒΔ)+(ΓΒΔ)+(ΑΒΓ)+(ΑΓΔ))$ ή

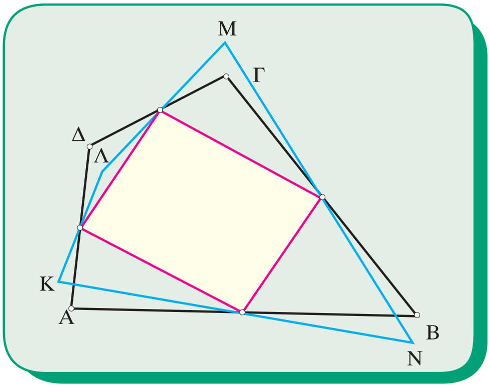
$$(AKN)+(\Gamma\Lambda M)+(BMN)+(\Delta K\Lambda)=\frac{1}{4}\,2(AB\Gamma\Delta)$$

$$(AKN)+(\Gamma\Lambda M)+(BMN)+(\Delta K\Lambda)=\frac{1}{2}\,(AB\Gamma\Delta).$$

Στο πρώτο μέλος της παραπάνω σχέσης έχουμε το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ , εκτός του ΚΛΜΝ. Επειδή αυτά έχουν άθροισμα εμβαδών ίσο με το μισό του εμβαδού ΑΒΓΔ, το εσωτερικό του ΚΛΜΝ έχει εμβαδόν το άλλο μισό.

Έχουμε δηλαδή $(K\Lambda MN)=\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.

γ. Το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται αν ενώσουμε τα μέσα των πλευρών του κάθε τετραπλεύρου, είναι κοινό (αφού τα δύο τετράπλευρα έχουν κοινά μέσα). Αυτό όμως το παραλληλόγραμμο έχει το μισό εμβαδόν από κάθε ένα τετράπλευρο.
Άρα τα δύο τετράπλευρα είναι ισοδύναμα.



δ. Αν οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ είναι ίσες, (σχήμα 1) το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ που σχηματίζεται αν ενώσουμε τα μέσα των πλευρών του είναι ρόμβος. Για το εμβαδόν του ρόμβου γνωρίζουμε ότι ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.

Έτσι $$(K\Lambda MN)=\frac{(KM)\cdot(\Lambda N)}{2} \quad (1)$$

Αλλά σύμφωνα με το (β) ερώτημα $$(K\Lambda MN)=\frac{(AB\Gamma\Delta)}{2} \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε: $$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{2}=\frac{(KM)\cdot(\Lambda N)}{2}\Leftrightarrow(AB\Gamma\Delta)=(KM)\cdot(\Lambda N)$$

Άσκηση 9

α. Να δείξετε, ότι η διαγώνιος παραλληλογράμμου, χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.

β. Από τις κορυφές ενός τετραπλεύρου φέρνουμε παράλληλες προς τις διαγώνιές του. Να αποδειχθεί, ότι το περιγεγραμμένο στο τετράπλευρο παραλληλόγραμμο, που σχηματίζεται, έχει εμβαδόν διπλάσιο από το εμβαδόν του τετραπλεύρου.

Λύση

α. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ίσα αφού έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες. Επομένως είναι και ισοδύναμα.

β. Το τετράπλευρο ΑΚΔΟ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Η διαγώνιος του ΑΔ το χωρίζει σε 2 ισοδύναμα τρίγωνα (ΑΚΔ) = (ΑΔΟ)

Ομοίως: (ΒΑΛ) = (ΒΑΟ)

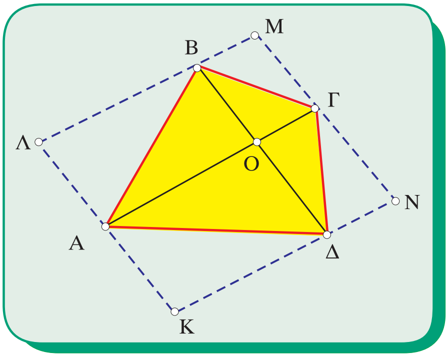
(ΒΜΓ) = (ΒΟΓ)

(ΓΝΔ) = (ΓΟΔ)

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

(ΑΚΔ) + (ΒΑΛ) + (ΒΜΓ) + (ΓΝΔ) = (ΑΒΓΔ)

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη το (ΑΒΓΔ) προκύπτει: (ΚΛΜΝ) = 2(ΑΒΓΔ).

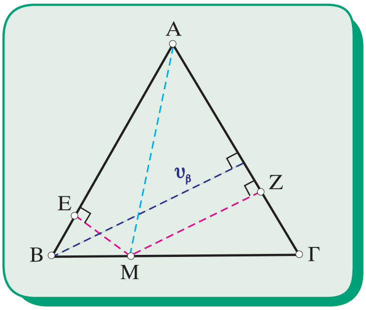


Άσκηση 10

Να δείξετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων ενός σημείου της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ από τις ίσες πλευρές είναι σταθερό.

Λύση

Έστω Μ είναι το τυχαίο σημείο της ΒΓ και ΜΕ ,ΜΖ οι αποστάσεις του από τις ίσες πλευρές του ΑΒΓ τότε:



$$(\text{ΑΒΓ}) = (\text{ΑΒΜ}) + (\text{ΑΓΜ}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\text{ΑΓ})(\upsilon_\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}(\text{ΑΒ})(\text{ΜΕ}) + \frac{1}{2}(\text{ΑΓ})(\text{ΜΖ}) \Leftrightarrow \text{ΜΕ} + \text{ΜΖ} = \upsilon_\beta .$$

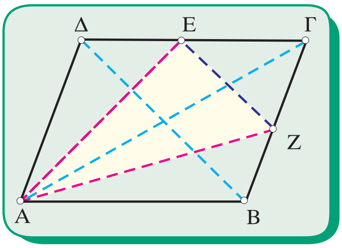
Όμως το υ_β είναι σταθερό ως ύψος του δοθέντος ισοσκελούς τριγώνου.

Άσκηση 11

Σ' ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ συνδέουμε την κορυφή του Α με τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Ν' αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ είναι ίσο με τα 3/8 του εμβαδού του παραλληλογράμμου.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι: $(\text{ΑΕΖ}) = \frac{3}{8}(\text{ΑΒΓΔ})$



Έχουμε: $(\text{ΑΕΖ}) = (\text{ΑΕΓ}) + (\text{ΑΓΖ}) - (\text{ΕΓΖ})$ (1)

Είναι όμως: $(\text{ΑΕΓ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΔΓ}) = \frac{1}{4}(\text{ΑΒΓΔ})$ (2)

$(\text{ΑΓΖ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΓΒ}) = \frac{1}{4}(\text{ΑΒΓΔ})$ (3)

$(\text{ΕΓΖ}) = \frac{1}{4}(\text{ΒΔΓ}) = \frac{1}{8}(\text{ΑΒΓΔ})$ (4)

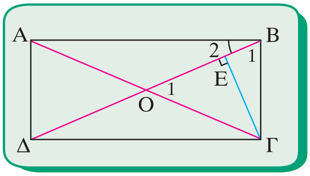
Οπότε η (1) με βάση τις (2) ,(3) και (4) γράφεται:

$$(ΑΕΖ) = \frac{1}{4}(ΑΒΓΔ) + \frac{1}{4}(ΑΒΓΔ) - \frac{1}{8}(ΑΒΓΔ) = \frac{3}{8}(ΑΒΓΔ).$$

Άσκηση 12

Ορθογωνίου ΑΒΓΔ το εμβαδόν είναι ίσο με $\frac{ΒΔ^2}{4}$, όπου ΒΔ διαγώνιος. Να βρεθούν οι γωνίες που σχηματίζουν οι πλευρές του με τις διαγωνίους του.

Λύση



Είναι $(ΑΒΓΔ) = 2(ΒΓΔ) = 2\frac{1}{2}ΒΔ \cdot ΓΕ = ΒΔ \cdot ΓΕ$ (1)

Από την υπόθεση έχουμε: $(ΑΒΓΔ) = \frac{ΒΔ^2}{4}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$ΒΔ \cdot ΓΕ = \frac{ΒΔ^2}{4} \Leftrightarrow ΒΔ = 4ΓΕ \quad (3)$$

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες δηλαδή $ΒΔ = ΑΓ$.

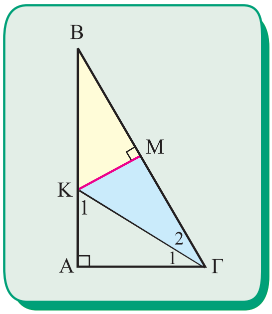
Οπότε η (3) γίνεται $ΑΓ = 4ΓΕ \Leftrightarrow 2ΟΓ = 4ΓΕ \Leftrightarrow ΓΕ = \frac{ΟΓ}{2}$

Στο ορθογώνιο $Ο\hat{Ε}Γ$ η ΓΕ ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Επομένως η απέναντί της οξεία γωνία ισούται με 30°, δηλαδή $\widehat{Ο_1} = 30^\circ$. Το τρίγωνο $Γ\hat{Ο}Β$ είναι ισοσκελές $(ΟΒ = ΟΓ)$ και η γωνία της κορυφής του (η $\widehat{Ο_1}$) ισούται με 30°. Επομένως $\hat{Β}_1 = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ και $\hat{Β}_2 = 15^\circ$.

Άσκηση 13

Η μεσοκάθετος της υποτείνουσας ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τέμνει την ΑΒ στο Κ. Ισχύει $(ΒΚΜ) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ)$. Να βρεθεί η γωνία $\hat{Β}$.

Λύση



Στο τρίγωνο $Β\hat{Κ}Γ$ η ΚΜ είναι διάμεσος.

Επομένως $(ΒΚΜ) = (ΓΚΜ) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ)$.

Άρα $(ΑΚΓ) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ) \Leftrightarrow \frac{1}{2}ΑΚ \cdot ΑΓ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΑΓ \Leftrightarrow$

$AK = \frac{1}{3}AB \Leftrightarrow AK = \frac{1}{2}KB$ (1)

Επειδή η ΚΜ μεσοκάθετος είναι $KB = K\Gamma$ (2)

Από (1), (2) έχουμε $AK = \frac{1}{2}K\Gamma$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $K\overset{\triangle}{A}\Gamma$ η κάθετη πλευρά ΑΚ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΚΓ. Επομένως $\hat{\Gamma}_1 = 30^o$, οπότε $\hat{K}_1 = 60^o$.

Η $\hat{K}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $B\overset{\triangle}{K}\Gamma$.

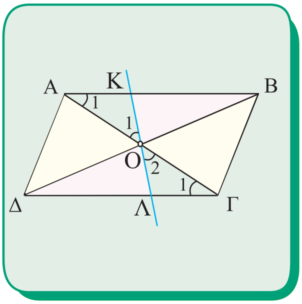
Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}_2 = 30^o \Leftrightarrow \hat{B} = 30^o$.

Άσκηση 14

Να δειχθεί, ότι κάθε ευθεία, που διέρχεται από το κέντρο ενός παραλληλογράμμου, χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε ισοδύναμες πολυγωνικές επιφάνειες.

Λύση

Πρέπει να δείξουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου ΑΚΛΔ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου ΚΒΓΛ.



Είναι $A\overset{\triangle}{K}O = \Gamma\overset{\triangle}{O}\Lambda$ γιατί έχουν: $AO = O\Gamma$

$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (κατακορυφήν)

$\widehat{A_1} = \widehat{\Gamma_1}$ (εντός εναλλάξ)

Επομένως $(AKO) = (\Gamma O\Lambda)$ (1)

Ομοίως $K\overset{\triangle}{O}B = \Delta\overset{\triangle}{O}\Lambda$. Άρα $(\Delta O\Lambda) = (KOB)$ (2)

και $\Delta\overset{\triangle}{O}A = B\overset{\triangle}{O}\Gamma$ δηλ. $(\Delta OA) = (BO\Gamma)$ (3)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1),(2),(3)

και έχουμε: $(AKO) + (\Delta O\Lambda) + (\Delta OA) = (\Gamma O\Lambda) + (KOB) + (BO\Gamma)$

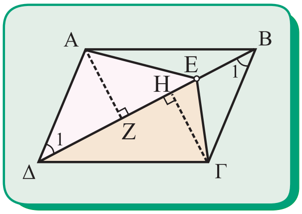
ή $(AK\Lambda\Delta) = (KB\Gamma\Lambda)$ που είναι η σχέση που θέλαμε να δείξουμε.

Άσκηση 15

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε της διαγωνίου ΒΔ.

α. Να δειχθεί, ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΔΕ είναι ισοδύναμα.

β. Να δειχθεί, ότι οι αποστάσεις του Ε από τις ΑΔ και ΓΔ είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τις πλευρές αυτές.



Λύση

α. Φέρνουμε τα ύψη ΑΖ και ΓΗ των τριγώνων ΑΔΕ και ΓΔΕ.

Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΒΗΓ είναι ίσα αφού έχουν:

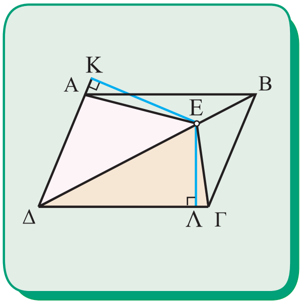
$A\Delta = B\Gamma$

$$\hat{H} = \hat{Z} = 1 \text{ ορθή}$$

$$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

Επομένως $AZ = \Gamma H$ (1)

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΔΕ έχουν κοινή βάση ΔΕ και ίσα ύψη ΑΖ, ΓΗ (λόγω της (1)). Επομένως είναι ισοδύναμα.



β. $(A\Delta E) = (\Gamma\Delta E) \Leftrightarrow \frac{1}{2} A\Delta \cdot EK = \frac{1}{2} \Delta\Gamma \cdot E\Lambda \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A\Delta \cdot EK = \Delta\Gamma \cdot E\Lambda \Leftrightarrow \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{E\Lambda}{EK}$$

Δηλαδή οι πλευρές είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τις αποστάσεις του Ε από αυτές.

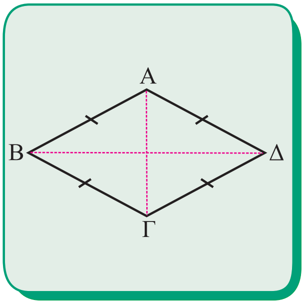
Άσκηση 16

Να δείξετε ότι σε ρόμβο, του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας διαγωνίου επί την πλευρά του, η μια γωνία του είναι 60^0.

Λύση

Μας δίνεται ότι $E_{\rho o\mu\beta o\upsilon} = \frac{AB \cdot \Delta B}{2}$ (1)

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.



Δηλ. $(AB\Gamma\Delta) = \frac{A\Gamma \cdot \Delta B}{2}$ (2)

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{AB \cdot \Delta B}{2} = \frac{A\Gamma \cdot \Delta B}{2} \Leftrightarrow AB = A\Gamma \quad (3)$$

Οι πλευρές του ρόμβου είναι όλες ίσες. Δηλ. $AB = B\Gamma$ (4).

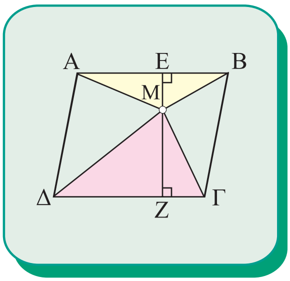
Από (3), (4): $AB = A\Gamma = B\Gamma$ δηλ. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως $\hat{B} = 60^0$.

Άσκηση 17

Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ να δείξετε ότι:

$$E_{MAB} + E_{M\Gamma\Delta} = \frac{1}{2} E_{AB\Gamma\Delta}$$

Λύση



Φέρνουμε τις $ME \perp AB$ και $MZ \perp \Gamma\Delta$.

Είναι: $E_{MAB} + E_{M\Gamma\Delta} = \frac{1}{2} AB \cdot EM + \frac{1}{2} \Gamma\Delta \cdot MZ = \frac{1}{2} AB \cdot (ME + MZ)$

αφού $AB = \Gamma\Delta$.

Όμως ΜΕ + ΜΖ = ΕΖ, δηλαδή το ύψος του παραλληλογράμμου.

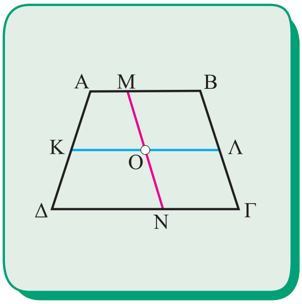
Επομένως $E_{MAB} + E_{M\Gamma\Delta} = \frac{1}{2}E_{AB\Gamma\Delta}$, αφού $E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{1}{2}AB \cdot EZ$.

Άσκηση 18

Να αποδειχθεί, ότι κάθε ευθεία, που διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ενός τραπεζίου και τέμνει τις βάσεις του, χωρίζει το τραπέζιο σε δύο ισοδύναμα τραπέζια.

Λύση

Τα ΑΜΝΔ και ΜΒΓΝ είναι τραπέζια. Έτσι έχουμε:



$$(AMN\Delta) = \frac{AM + \Delta N}{2} \cdot \upsilon_1$$
$$\text{και } (MB\Gamma N) = \frac{MB + \Gamma N}{2} \cdot \upsilon_2 \qquad (1)$$

όπου υ_1, υ_2 είναι τα ύψη των δύο τραπεζίων. Ως γνωστόν σε κάθε τραπέζιο η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων.

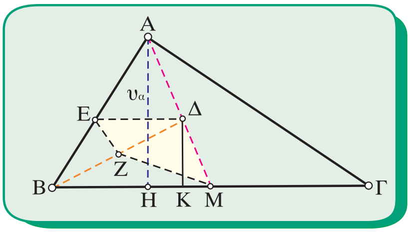
Άρα
$$KO = \frac{AM + \Delta N}{2}$$
$$\text{και } O\Lambda = \frac{MB + \Gamma N}{2} \qquad (2)$$

Αλλά ΚΟ = ΟΛ (αφού Ο μέσο ΚΛ) και $\upsilon_1 = \upsilon_2$ (τα δύο τραπέζια είναι προφανές ότι έχουν ίσα ύψη). Τελικά (ΑΜΝΔ) = (ΜΒΓΝ).

Άσκηση 19

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ το μέσο της διαμέσου ΑΜ, Ε το μέσο της ΑΒ και Ζ το μέσο της ΒΔ. Να βρεθεί το εμβαδόν του ΔΕΖΜ συναρτήσει του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση



Είναι Δ, Ε μέσα των ΑΜ και ΑΒ αντίστοιχα, άρα $\Delta E = \frac{BM}{2}$. Φέρνουμε το ύψος ΑΗ στην πλευρά ΒΜ του τριγώνου ΑΒΜ και το ύψος ΔΚ στην πλευρά ΒΜ του τριγώνου ΔΒΜ.

Είναι Δ μέσο της ΑΜ και ΔΚ//ΑΗ αφού είναι κάθετες στην ΒΜ. Άρα $\Delta K = \frac{AH}{2}$.

Έχουμε: $E_{\Delta EZM} = E_{\Delta EZ} + E_{\Delta ZM} = \frac{1}{2}E_{\Delta EB} + \frac{1}{2}E_{\Delta BM} = \frac{1}{2}(E_{\Delta EB} + E_{\Delta BM}) = \frac{1}{2}E_{\Delta EBM}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta E + BM) \cdot \Delta K}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{BM}{2} + BM\right) \cdot \frac{AH}{2}}{2} = \frac{3}{16} B\Gamma \cdot AH = \frac{3}{8} E_{AB\Gamma}$$

(Για τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΔΖΜ χρησιμοποιήσαμε την πρόταση :
Η διάμεσος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Για το ΔΕΒΜ χρησιμοποιήσαμε τον τύπο του εμβαδού τραπεζίου ΄΄βάση μεγάλη και βάση μικρή επί ύψος δια 2΄΄, αφού ΔΕ//ΒΜ και ΔΕ, ΒΜ οι βάσεις και ΔΚ το ύψος του. Τέλος για το ΑΒΓ πήραμε τον τύπο ΄΄βάση επί ύψος δια 2΄΄)

Άσκηση 20

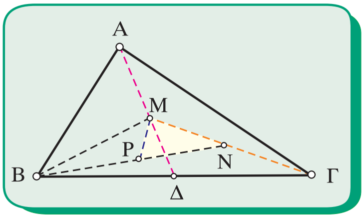
Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ, το μέσο Ν του ΓΜ και το μέσο Ρ του ΒΝ να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι οκταπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΜΝΡ

Λύση

Φέρνουμε την ΒΜ. Είναι :

$$E_{MNP} = \frac{1}{2}E_{BMN} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}E_{BM\Gamma} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(E_{AB\Delta} + E_{A\Gamma\Delta}) = \frac{1}{8}E_{AB\Gamma}$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι οκταπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΜΝΡ.



(Χρησιμοποιήσαμε την πρόταση :
Η διάμεσος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα και πήραμε διαδοχικά την ΜΡ διάμεσο στο ΒΜΝ, την ΒΝ διάμεσο στο ΒΜΓ και γράψαμε το ΒΜΓ ως άθροισμα των ΒΜΔ και ΜΔΓ.
Έπειτα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ΜΝ είναι διάμεσος στο ΑΒΔ και η ΓΜ διάμεσος στο ΑΔΓ. Τέλος προσέξαμε ότι το άθροισμα των εμβαδών των ΑΒΔ και ΑΓΔ δίνει το εμβαδό του ΑΒΓ)

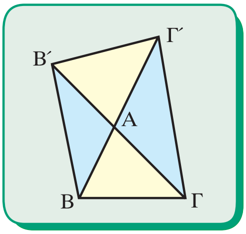
Άσκηση 21

Από την κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε μιά οποιαδήποτε ευθεία , που συναντά την προέκταση της ΓΑ (προς το μέρος του Α) σε ένα σημείο Β'. Φέρνουμε ακόμα και τη ΓΓ'//ΒΒ', που συναντά την προέκταση της ΒΑ στο Γ'. Να αποδειχθεί, ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ'Γ' είναι ισοδύναμα.

Λύση

Τα τρίγωνα ΒΓΓ΄ και Β΄ΓΓ΄ είναι ισοδύναμα αφού έχουν κοινή βάση Γ΄Γ και οι κορυφές τους βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη προς τη βάση. Έχουμε λοιπόν: (ΒΓΓ΄) = (Β΄ΓΓ΄). Αφαιρούμε το κοινό τους τμήμα ΑΓΓ΄και έχουμε:

$$(B\Gamma\Gamma') - (A\Gamma\Gamma') = (B'\Gamma\Gamma') - (A\Gamma\Gamma') \Leftrightarrow (AB\Gamma) = (AB'\Gamma')$$



Άσκηση 22

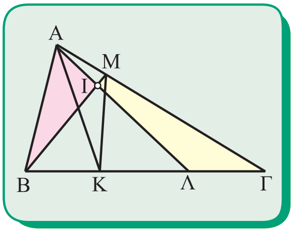
Στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Κ και Λ έτσι ώστε $B K = \Gamma\Lambda < \frac{B\Gamma}{2}$.

Από το Κ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Μ.
Οι ΑΛ και ΒΜ τέμνονται στο Ι.

Να δειχτεί ότι $(IAB) = (IM\Gamma\Lambda)$.

Λύση

Επειδή το σχήμα ΙΛΓΜ δεν είναι κάποιο γνωστό μας σχήμα, προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ζητούμενης σχέσης το χωρίο ΑΜΙ. Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι $(\text{ΑΒΜ}) = (\text{ΑΓΛ})$.



Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΚ}}$ και $\overset{\triangle}{\text{ΑΓΛ}}$ είναι ισοδύναμα αφού έχουν ίσες βάσεις $\text{ΒΚ} = \text{ΛΓ}$ και κοινό ύψος από το Α δηλαδή $(\text{ΑΒΚ}) = (\text{ΑΓΛ})$ (1).

Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΜ}}$ και $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΚ}}$ είναι ισοδύναμα γιατί έχουν κοινή βάση την ΑΒ και ίσα ύψη αφού η τρίτη κορυφή τους βρίσκεται στην ευθεία ΚΜ που είναι παράλληλη στην ΑΒ.

Έχουμε λοιπόν $(\text{ΑΒΜ}) = (\text{ΑΒΚ})$ (2).

Από (1), (2) έχουμε $(\text{ΑΓΛ}) = (\text{ΑΒΜ})$ που είναι το ζητούμενο.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 4, ΑΔ = 3, $\text{ΓΔ} = 2\sqrt{10}$, ΑΓ = 7 και ΒΔ = 5. Αφού διαπιστώσετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο τραπέζιο να βρείτε το εμβαδόν του.

(**Απ:** $\text{Ε} = 3(2+\sqrt{10})$)

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ, ΑΒ//ΓΔ όταν ΑΒ = 4, ΓΔ = 10 και ΑΔ = ΒΓ = 5.

(**Απ:** 28)

3. Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να αποδειχθεί ότι, για οποιοδήποτε σημείο Μ της πλευράς ΑΒ, το τρίγωνο ΜΓΔ έχει σταθερό εμβαδό.

4. Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει βάσεις ΑΒ = α και ΓΔ = 2α, ενώ το ύψος του είναι 1,5α. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων στα οποία χωρίζεται το τραπέζιο από τις διαγώνιές του.

(**Απ:** $\text{Ε}_{\text{ΜΑΒ}} = \dfrac{\alpha^2}{4}$, $\text{Ε}_{\text{ΜΓΔ}} = \alpha^2$, $\text{Ε}_{\text{ΜΑΔ}} = \text{Ε}_{\text{ΜΒΓ}} = \dfrac{\alpha^2}{2}$, όπου Μ το σημείο τομής των διαγωνίων.

(**Υπ:** Να πάρετε τα ύψη ΜΕ και ΜΖ των τριγώνων ΑΜΒ και ΓΜΔ αντίστοιχα και να βρείτε τα ΜΕ και ΜΖ συναρτήσει του α, από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΜΒ και ΓΜΔ. Εδώ πρέπει να παρατηρήσετε ότι ο λόγος των υψών δυο όμοιων τριγώνων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους)

5. Να υπολογιστεί το εμβαδό τραπεζίου ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ = 4, ΓΔ = 8 και μη παράλληλες πλευρές ΑΔ = 5 και ΒΓ = 7.

(**Απ:** $12\sqrt{6}$. **Υπ:** Να φέρετε ΒΕ//ΑΔ και να υπολογίσετε το ύψος ΒΖ του τριγώνου ΒΕΓ, που είναι και ύψος του τραπεζίου)

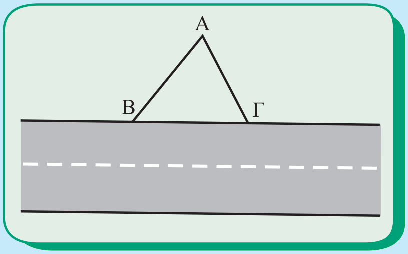
6. Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΑΕ = ΒΖ = \frac{2}{3}α$. Να αποδείξετε ότι η είναι ΑΖ κάθετη στη ΔΕ και να υπολογίσετε τα εμβαδά των τεσσάρων χωρίων, στα οποία χωρίζεται το τετράγωνο.

(**Απ:** $E_{ΑΔΗ} = \frac{3α^2}{13}, E_{ΑΗΕ} = \frac{4α^2}{39}, E_{ΒΕΗΖ} = \frac{3α^2}{13}, E_{ΓΔΗΖ} = \frac{17α^2}{39}$,
όπου Η το σημείο τομής της ΑΖ με την ΔΕ.
(**Υπ:** Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΔΕ είναι ίσα. Η ΑΗ είναι το ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ. Να βρείτε με Π.Θ το ΔΕ και από τη σχέση $ΑΔ^2 = ΔΕ \cdot ΔΗ$ το ΔΗ)

7. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, ΑΒ//ΓΔ, φέρνουμε το ύψος ΑΕ. Να αποδείξετε ότι :
$$E_{ΑΒΓΔ} = 2E_{ΕΑΓ}$$

8. Να αποδείξετε ότι από όλα τα τετράπλευρα με ίσες διαγωνίους, μέγιστο εμβαδό έχει αυτό που οι διαγώνιοί του είναι κάθετες.

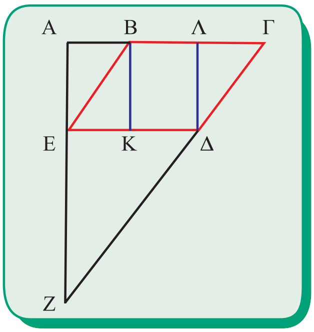
9. Διαθέτουμε δύο σχοινιά ΑΒ και ΑΓ μήκους 8 και 6 μέτρων αντίστοιχα. Με τα σχοινιά αυτά θέλουμε να σχηματίσουμε μια τριγωνική επιφάνεια στον διπλανό δρόμο, η οποία θα χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία κήπου. Να βρεθεί ποιό θα είναι το μήκος του δρόμου ΒΓ ώστε το εμβαδό του κήπου ΑΒΓ να είναι μέγιστο και ποιό θα είναι το μέγιστο εμβαδό του κήπου ΑΒΓ.



10. Η περίμετρος ενός ρόμβου είναι 20 και η απόσταση δύο απέναντι πλευρών του είναι $\frac{24}{5}$. Να βρεθεί το εμβαδόν του.

Ε "ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ"

Στο διπλανό σχήμα το ΑΓΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο και το ΕΒΓΔ παραλληλόγραμο. Να βρείτε τους λόγους $\frac{E_{ΕΒΓΔ}}{E_{ΑΓΖ}}$ και $\frac{E_{ΕΔΖ}}{E_{ΑΓΖ}}$ αν γνωρίζουμε ότι στο σχήμα το παραλληλόγραμμο είναι χωρισμένο σε 3 ισοδύναμα χωρία.



Μάθημα 8
Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου
Λόγος εμβαδών ομοίων τριγώνων - πολυγώνων

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

Με τη βοήθεια του βασικού τύπου για το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ, με μήκη πλευρών α, β, γ, προκύπτουν οι επόμενοι τύποι:

1. $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ **(Τύπος του Ήρωνα)**

Με τον τύπο του Ήρωνα μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν τριγώνου όταν γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του.

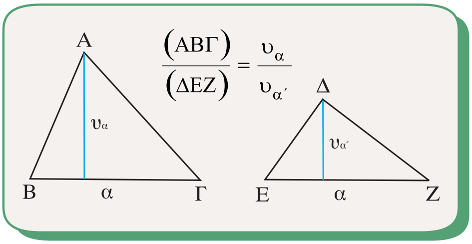
2. Ο τύπος $E=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ συνδέει το εμβαδόν (Ε) του τριγώνου με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Συνήθως χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε την ακτίνα, δεδομένου ότι γνωρίζουμε το εμβαδόν . Το ίδιο ισχύει και με τον τύπο $E=\tau\,\rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου.

3. Ο τύπος $E=\dfrac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A=\dfrac{1}{2}\gamma\alpha\,\eta\mu B=\dfrac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma$ μας δίνει το εμβαδόν, όταν γνωρίζουμε δύο πλευρές του τριγώνου και την περιεχόμενη σε αυτές γωνία.

4. Με συνδυασμό των τύπων $E=\dfrac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A$ και $E=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ προκύπτει ο νόμος των ημιτόνων:

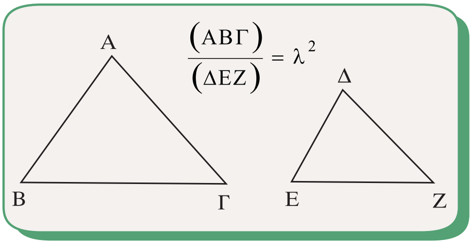
$\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R$, ο οποίος είναι χρήσιμος για την επίλυση ενός τριγώνου.

Θεώρημα 1
Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντιστοίχων βάσεων.



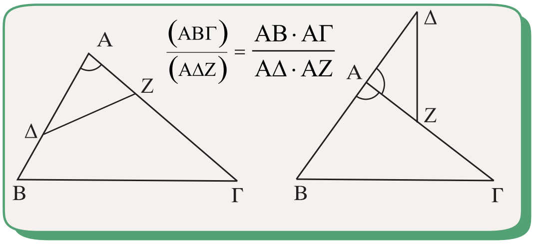
Θεώρημα 2

Αν δύο τρίγωνα (ή οποιαδήποτε πολύγωνα) είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.



Θεώρημα 3

Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις ίσες ή παραπληρωματικές γωνίες.



Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Όταν δυο τρίγωνα έχουν κοινή (ή ίση) βάση ή κοινό (ή ίσο) ύψος εφαρμόζουμε τις παρακάτω προτάσεις:

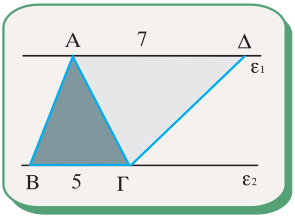
"Δύο τρίγωνα με ίσες βάσεις έχουν λόγο εμβαδών ίσο με τον λόγο των αντίστοιχων υψών τους"

ή

"Δύο τρίγωνα με ίσα ύψη έχουν λόγο εμβαδών ίσο με τον λόγο των αντιστοίχων βάσεων τους".

Παράδειγμα 1

Με βάση το διπλανό σχήμα να βρείτε το λόγο $\dfrac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΑΓΔ}}$.



Λύση

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν ίσα ύψη από τις κορυφές Α και Γ αφού $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ οπότε θα έχουμε: $\dfrac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΑΓΔ}} = \dfrac{ΒΓ}{ΑΔ} = \dfrac{5}{7}$ που είναι και ο ζητούμενος λόγος.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

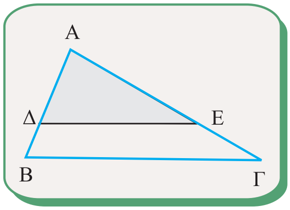
Όταν έχουμε όμοια σχήματα, εφαρμόζουμε το παρακάτω θεώρημα:

"Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους".

Παράδειγμα 2

Αν $ΔΕ // ΒΓ$ και $ΑΔ = 2ΔΒ$, ποια σχέση συνδέει τα εμβαδά των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ;

Λύση



Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια $(ΔΕ \parallel ΒΓ)$

οπότε έχουμε: $\lambda = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ} \Leftrightarrow \lambda = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}$

όμως $ΑΔ = 2ΔΒ \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{ΔΒ} = 2 \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΔ + ΔΒ} = \frac{2}{2+1} \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$.

Άρα $\lambda = \frac{2}{3}$. Επομένως για το ζητούμενο λόγο εμβαδών θα έχουμε:

$$\frac{E_{ΑΔΕ}}{E_{ΑΒΓ}} = \lambda^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{E_{ΑΔΕ}}{E_{ΑΒΓ}} = \frac{4}{9}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

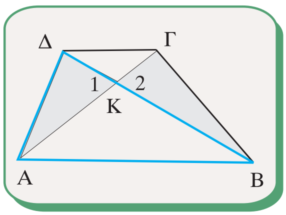
Όταν σε δύο τρίγωνα έχουμε γωνίες ίσες ή παραπληρωματικές εφαρμόζουμε το παρακάτω θεώρημα:
"Αν μια γωνία τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μία γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές".

Παράδειγμα 3

Έστω Κ το σημείο τομής των διαγωνίων τραπεζίου ΑΒΓΔ $(ΑΒ // ΓΔ)$. Να αποδειχθεί ότι $E_{ΚΑΔ} = E_{ΚΒΓ}$.

Λύση

Στα τρίγωνα ΚΑΔ και ΚΒΓ έχουμε $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ (ως κατακορυφήν) άρα θα έχουμε:



$$\frac{E_{ΚΑΔ}}{E_{ΚΒΓ}} = \frac{ΚΑ \cdot ΚΔ}{ΚΒ \cdot ΚΓ} \qquad (1)$$

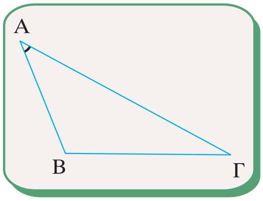
Όμως $ΑΒ \parallel ΓΔ$ (διότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο) επομένως:

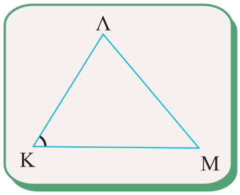
$$\frac{ΚΑ}{ΚΓ} = \frac{ΚΒ}{ΚΔ} \Leftrightarrow \frac{ΚΑ \cdot ΚΔ}{ΚΓ \cdot ΚΒ} = 1 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\frac{E_{ΚΑΔ}}{E_{ΚΒΓ}} = 1 \Leftrightarrow E_{ΚΑΔ} = E_{ΚΒΓ}$

Παράδειγμα 4

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν $\hat{B}+\hat{\Lambda}=180^\circ$ και $\hat{A}=\hat{K}$. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{ΒΓ}{ΛΜ}=\dfrac{ΑΓ}{ΚΜ}$.





Λύση

Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουμε $\hat{A}=\hat{K}$ οπότε:

$$\frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΚΛΜ}}=\frac{ΑΓ\cdot ΑΒ}{ΚΜ\cdot ΚΛ} \quad (1)$$

Γνωρίζουμε όμως από την υπόθεση ότι $\hat{B}+\hat{\Lambda}=180^\circ$ οπότε:

$$\frac{E_{ΑΒΓ}}{E_{ΚΛΜ}}=\frac{ΒΓ\cdot ΑΒ}{ΛΜ\cdot ΚΛ} \quad (2)$$

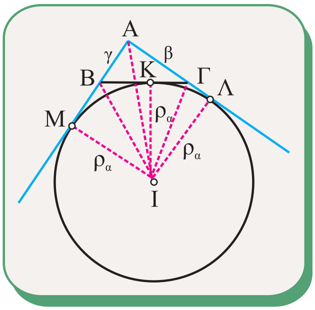
Από τις (1) και (2) έχουμε: $\dfrac{ΒΓ}{ΛΜ}=\dfrac{ΑΓ}{ΚΜ}$ που είναι και η ζητούμενη σχέση.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι (ΑΒΓ) = $\rho_\alpha(\tau-\alpha)=\rho_\beta(\tau-\beta)=\rho_\gamma(\tau-\gamma)$, όπου ρ_α, ρ_β, ρ_γ είναι οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση



Είναι (ΑΒΓ) = (ΑΙΒ) + (ΑΙΓ) - (ΙΒΓ) =

$$= \frac{1}{2}\gamma\, IM + \frac{1}{2}\beta\, I\Lambda - \frac{1}{2}\alpha\, IK == \frac{1}{2}\gamma\,\rho_\alpha + \frac{1}{2}\beta\,\rho_\alpha - \frac{1}{2}\alpha\,\rho_\alpha =$$

$$\frac{1}{2}\rho_\alpha(\beta+\gamma-\alpha).$$

Όμως $\tau-\alpha=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\alpha=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma-2\alpha}{2}=\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$.

Επομένως Ε = $\rho_\alpha(\tau-\alpha)$. Ομοίως και με τους άλλους δύο τύπους.

Άσκηση 2

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^0$) να δείξετε ότι $\rho=\dfrac{\beta\cdot\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου.

Λύση

Είναι $(ΑΒΓ)=\tau\rho=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\rho$ (1) και $(ΑΒΓ)=\dfrac{1}{2}\beta\gamma$ (2)

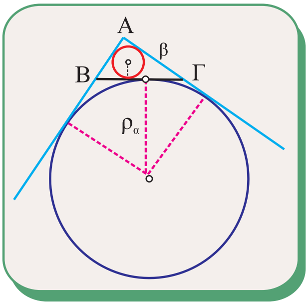
Από (1) και (2) έχουμε: $\frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\rho \Leftrightarrow \beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Άσκηση 3

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι $\alpha \geq 2\sqrt{\rho\cdot\rho_\alpha}$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου και ρ_α η ακτίνα του παρεγγεγραμμένου κύκλου που εφάπτεται στην πλευρά α.

Λύση

Είναι $\left.\begin{array}{c} E=\tau\cdot\rho \\ E=(\tau-\alpha)\rho_\alpha (\text{άσκηση } 1)\end{array}\right\}$ Άρα $E^2 = \rho\cdot\rho_\alpha\cdot\tau(\tau-\alpha)$ (1)



Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Ήρωνα η σχέση (1) γίνεται:

$$\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) = \rho\cdot\rho_\alpha\tau(\tau-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\tau-\beta)(\tau-\gamma) = \rho\cdot\rho_\alpha \qquad (2)$$

Ισχύει

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{\psi}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\psi} + \sqrt{\psi}^2 \geq 0 \Leftrightarrow x+\psi \geq 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\psi} \quad (3)$$

Θέτοντας $x = \tau - \beta$ και $\psi = \tau - \gamma$ από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\tau - \beta + \tau - \gamma \geq 2\sqrt{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2\tau-\beta-\gamma \geq 2\sqrt{\rho\cdot\rho_\alpha} \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma-\beta-\gamma \geq 2\sqrt{\rho\cdot\rho_\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \geq 2\sqrt{\rho\cdot\rho_\alpha} \;.$$

Άσκηση 4

Αν σε τρίγωνο ισχύει $\rho\cdot\rho_\alpha = \rho_\beta\cdot\rho_\gamma$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^0$).

Λύση

Από τον τύπο $E = \tau\,\rho$ έχουμε $\rho = \frac{E}{\tau}$ και από τον τύπο $E = \rho_\alpha(\tau-\alpha)$:

$\rho_\alpha = \frac{E}{\tau-\alpha}$. Όμοια $E = \rho_\beta(\tau-\beta) \Leftrightarrow \rho_\beta = \frac{E}{\tau-\beta}$, $E = \rho_\gamma(\tau-\gamma) \Leftrightarrow \rho_\gamma = \frac{E}{\tau-\gamma}$.

Επομένως: $\rho\,\rho_\alpha = \rho_\beta\,\rho_\gamma \Leftrightarrow \frac{E}{\tau}\cdot\frac{E}{\tau-\alpha} = \frac{E}{\tau-\beta}\cdot\frac{E}{\tau-\gamma} \Leftrightarrow (\tau-\beta)\cdot(\tau-\gamma) = \tau\cdot(\tau-\alpha)$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^0.$$

Άσκηση 5

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν $\alpha > \beta$ να δείξετε ότι $\alpha + \upsilon_\alpha > \beta + \upsilon_\beta$. Πότε ισχύει το ίσον;

Λύση

Έστω η ζητούμενη σχέση: $\alpha + \upsilon_\alpha > \beta + \upsilon_\beta$ (1)

Είναι $E = \frac{1}{2}\beta\,\upsilon_\beta \Leftrightarrow \upsilon_\beta = \frac{2E}{\beta}$ (2) ομοίως $\upsilon_\alpha = \frac{2E}{\alpha}$ (3).

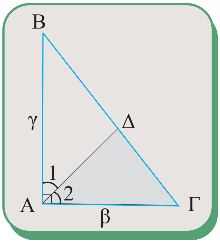
Η σχέση (1) γίνεται από τις (2) και (3):

$$\alpha - \beta \geq \frac{2E}{\beta} - \frac{2E}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha - \beta \geq 2E\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \alpha - \beta \geq 2E\frac{\alpha-\beta}{\alpha\,\beta} \overset{\alpha-\beta>0}{\Leftrightarrow} 1 \geq \frac{2E}{\alpha\,\beta} \Leftrightarrow$$

$2E \leq \alpha\beta \Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma \leq \alpha\beta \Leftrightarrow \eta\mu\Gamma \leq 1$,που ισχύει. Το ίσον ισχύει όταν $\hat{\Gamma} = 90^0$.

Άσκηση 6

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^0$) να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{\sqrt{2}}{\delta_\alpha} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$, όπου δ_α η διχοτόμος της γωνίας Α .



Λύση

$$(AB\Gamma) = (AB\Delta) + (A\Gamma\Delta) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{1}{2}\gamma\,\delta_\alpha\,\eta\mu A_1 + \frac{1}{2}\beta\,\delta_\alpha\,\eta\mu A_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{1}{2}\gamma\delta_\alpha\eta\mu 45^0 + \frac{1}{2}\beta\delta_\alpha\eta\mu 45^0 \Leftrightarrow (\beta+\gamma) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_\alpha(\beta+\gamma) \Leftrightarrow \frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma} = \frac{2}{\sqrt{2}\delta_\alpha} \Leftrightarrow \frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{\delta_\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{\delta_\alpha}$$

Άσκηση 7

Δίνεται τρίγωνο με πλευρές $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = 2$ και εμβαδόν $E = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$ (1).

Να υπολογισθεί η πλευρά α του τριγώνου.

Λύση

Ως γνωστόν $E = \frac{1}{2}\beta\,\gamma\,\eta\mu A \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}\beta\,\gamma\,\eta\mu A \Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως $A = 45^0$ ή $A = 135^0$.

Αν $A = 45^0$ από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow \alpha^2 = 2 + 4 - 2\sqrt{2}\cdot 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2\,.$$

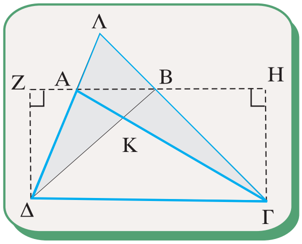
Αν $A = 135^0$ από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\ \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow \alpha^2 = 2 + 4 + 2\sqrt{2}\cdot 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 10\ .$$

Άσκηση 8

Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ και έστω Λ το σημείο που τέμνονται οι μη παράλληλες πλευρές του και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΛΑΓ και ΛΒΔ είναι ισοδύναμα, καθώς επίσης και τα τρίγωνα ΚΑΔ και ΚΒΓ.

Λύση



Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα αφού έχουν την ίδια βάση ΑΒ και ίσα ύψη ($\Delta Z = \Gamma H$ ως κάθετα τμήματα μεταξύ παράλληλων ευθειών).

Θα έχουμε δηλαδή $(AB\Delta) = (AB\Gamma)$ (1)

Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη της (1) το $(A\Lambda B)$ έχουμε:

$$(AB\Delta) + (A\Lambda B) = (AB\Gamma) + (A\Lambda B) \Leftrightarrow (\Lambda B\Delta) = (\Lambda A\Gamma)$$

Αν αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη της (1) το (ΚΑΒ) έχουμε:

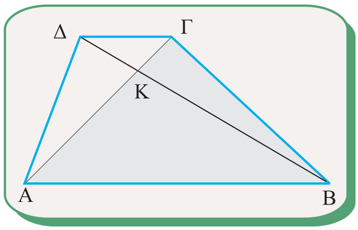
$$(AB\Delta) - (KAB) = (AB\Gamma) - (KAB) \Leftrightarrow (KA\Delta) = (KB\Gamma)$$

Άσκηση 9

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ του οποίου οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Κ.

Να δειχθεί ότι $(KB\Gamma)^2 = (KAB)\cdot(K\Gamma\Delta)$.

Λύση



Τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΚΑΒ έχουν το ίδιο ύψος (που άγεται από το Β) οπότε $\dfrac{(KB\Gamma)}{(KAB)} = \dfrac{K\Gamma}{KA}$ (1)

Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι $\dfrac{(K\Gamma\Delta)}{(KB\Gamma)} = \dfrac{K\Delta}{KB}$ (2)

Τα τρίγωνα ΚΑΒ και ΚΓΔ είναι όμοια άρα $\dfrac{K\Gamma}{KA} = \dfrac{K\Delta}{KB}$ (3)

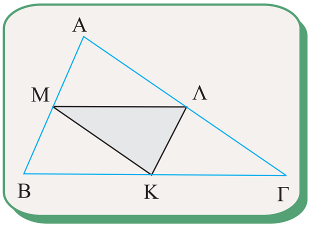
Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε ότι:

$$\frac{(KB\Gamma)}{(KAB)} = \frac{(K\Gamma\Delta)}{(KB\Gamma)} \Leftrightarrow (KB\Gamma)^2 = (KAB)\cdot(K\Gamma\Delta)$$

Άσκηση 10

Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα τριγώνου ΑΒΓ να βρείτε το λόγο $\frac{E_{K\Lambda M}}{E_{AB\Gamma}}$.

Λύση



Τα τρίγωνα ΚΛΜ και ΑΒΓ είναι όμοια γιατί Μ, Λ είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα οπότε $M\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}$.

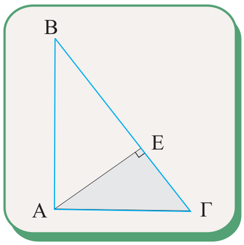
Με παρόμοιο σκεπτικό έχουμε: $KM = \frac{A\Gamma}{2}$ και $K\Lambda = \frac{AB}{2}$

οπότε έχουμε λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{1}{2}$. Άρα $\frac{E_{K\Lambda M}}{E_{AB\Gamma}} = \lambda^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Άσκηση 11

Αν ΑΕ είναι το ύψος προς την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι: $\frac{E_{ABE}}{E_{A\Gamma E}} = \frac{AB^2}{A\Gamma^2}$.

Λύση



Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΕ έχουν μια πλευρά κοινή, την ΑΕ οπότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών στην ΑΕ. Δηλαδή

$$\frac{E_{ABE}}{E_{A\Gamma E}} = \frac{BE}{\Gamma E} \qquad (1)$$

Ισχύει όμως ότι: $$\frac{BE}{\Gamma E} = \frac{AB^2}{A\Gamma^2} \qquad (2)$$

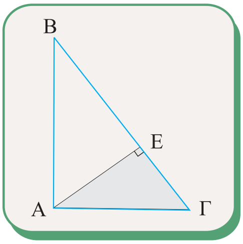
(μετρική σχέση στα ορθογώνια τρίγωνα)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε : $\frac{E_{ABE}}{E_{A\Gamma E}} = \frac{AB^2}{A\Gamma^2}$ που είναι η προς απόδειξη σχέση.

Άσκηση 12

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$, έχουμε ΑΒ = 8 και ΑΓ = 6 φέρνουμε το ύψος ΑΕ. Να βρείτε το λόγο $\frac{(ABE)}{(A\Gamma E)}$.

Λύση



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΑΕ είναι όμοια γιατί $\hat{B} = \widehat{EA\Gamma}$ (έχουμε οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες μία προς μία).

Οπότε: $\dfrac{(ABE)}{(\Gamma AE)} = \lambda^2 = \left(\dfrac{AB}{\Gamma A}\right)^2 = \left(\dfrac{8}{6}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$.

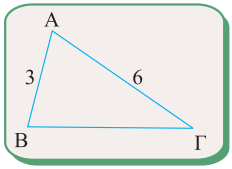
Παρατήρηση

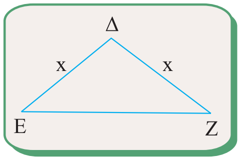
Δείτε, ότι οι ασκήσεις 14 και 15 είναι παρόμοιες, λυμένες με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Άσκηση 13

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 3$ και $A\Gamma = 6$. Να υπολογίσετε το μήκος των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ΔΕΖ $(\Delta E = \Delta Z)$, για το οποίο είναι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ και $(\Delta EZ) = 2(AB\Gamma)$.

Λύση





Έστω x το μήκος των ΔΕ και ΔΖ. Γνωρίζουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ οπότε:

$$\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E \cdot \Delta Z}{AB \cdot A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{2(AB\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{x \cdot x}{3 \cdot 6} \Leftrightarrow$$

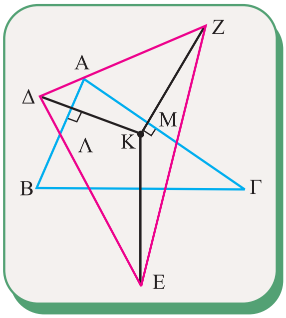
$$x^2 = 36 \Leftrightarrow x = 6$$

Άρα είναι $\Delta E = \Delta Z = 6cm$.

Άσκηση 14

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Κ μέσα σε αυτό. Από το Κ φέρνουμε ΚΔ κάθετη στην ΑΒ, ΚΕ κάθετη στην ΒΓ και ΚΖ κάθετη στην ΑΓ έτσι ώστε: ΚΔ = ΑΒ, ΚΕ = ΒΓ, ΚΖ = ΑΓ. Να αποδειχθεί, ότι (ΔΕΖ) = 3(ΑΒΓ)

Λύση



Στο τετράπλευρο ΑΜΚΛ έχουμε $\hat{\Lambda} + \hat{M} = 2∟$.

Επομένως $\hat{A} + \hat{K} = 2∟$.

(Το άθροισμα των γωνιών του οποιουδήποτε τετραπλεύρου είναι $4∟$). Τα τρίγωνα λοιπόν ΑΒΓ και ΚΔΖ έχουν τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{K}$ παραπληρωματικές.

Επομένως $\dfrac{(K\Delta Z)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{K\Delta \cdot KZ}{AB \cdot A\Gamma} = 1$.Επομένως $(K\Delta Z) = (AB\Gamma)$

Ομοίως $(K\Delta E) = (AB\Gamma)$ και $(KZE) = (AB\Gamma)$.

Άρα $(\Delta EZ)=(K\Delta Z)+(K\Delta E)+(KZE)=3(AB\Gamma)$.

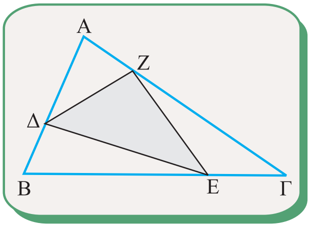
Άσκηση 15

Στις πλευρές ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε $A\Delta=\frac{3}{5}AB$, $BE=\frac{3}{5}B\Gamma$ και $\Gamma Z=\frac{3}{5}A\Gamma$.

Να δείξετε, ότι $(\Delta EZ)=\frac{7}{25}(AB\Gamma)$.

Λύση

Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΓ έχουν κοινή γωνία την $\hat{A}$.



Επομένως $\frac{(A\Delta Z)}{(AB\Gamma)}=\frac{A\Delta\cdot AZ}{AB\cdot A\Gamma}=\frac{\frac{3}{5}AB\cdot\frac{2}{5}A\Gamma}{AB\cdot A\Gamma}=\frac{6}{25}$ (1).

Ομοίως $\frac{(BE\Delta)}{(AB\Gamma)}=\frac{6}{25}$ (2) και $\frac{(\Gamma EZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{6}{25}$ (3).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2), (3):

$$\frac{(A\Delta Z)}{(AB\Gamma)}+\frac{(BE\Delta)}{(AB\Gamma)}+\frac{(\Gamma EZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{18}{25}\Leftrightarrow\frac{(AB\Gamma)-(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{18}{25}\Leftrightarrow 1-\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{18}{25}\Leftrightarrow$$

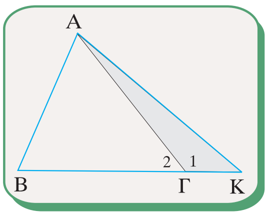
$$\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}=1-\frac{18}{25}\Leftrightarrow\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{7}{25}\Leftrightarrow(\Delta EZ)=\frac{7}{25}(AB\Gamma)$$

Άσκηση 16

Στην προέκταση της ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Κ, τέτοιο ώστε $3\Gamma K=B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι $E_{AB\Gamma}=3E_{A\Gamma K}$.

Λύση

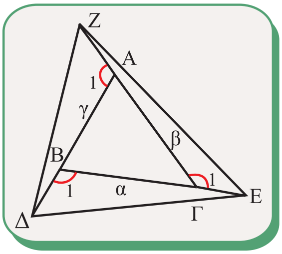


Έχουμε ότι $\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_2=180^\circ$.

Άρα θα ισχύει: $\frac{E_{AB\Gamma}}{E_{A\Gamma K}}=\frac{A\Gamma\cdot B\Gamma}{A\Gamma\cdot\Gamma K}\Leftrightarrow\frac{E_{AB\Gamma}}{E_{A\Gamma K}}=\frac{B\Gamma}{\Gamma K}\Leftrightarrow$

$$\frac{E_{AB\Gamma}}{E_{A\Gamma K}}=\frac{B\Gamma}{\frac{1}{3}B\Gamma}\Leftrightarrow\frac{E_{AB\Gamma}}{E_{A\Gamma K}}=3\Leftrightarrow E_{AB\Gamma}=3E_{A\Gamma K}$$

Άσκηση 17



Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ κατά τμήματα $B\Delta=\frac{\gamma}{2}$, $\Gamma E=\frac{\alpha}{3}$ και $AZ=\frac{\beta}{4}$ αντίστοιχα.

i. Να υπολογιστεί ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $\overset{\triangle}{\Delta E Z}$ και $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

ii. Το εμβαδόν του $\overset{\triangle}{\Delta E Z}$ συναρτήσει των α, β, γ.

Λύση

i. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{\Delta A Z}$ έχουν τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{A}_1$ παραπληρωματικές. Σύμφωνα με το γνωστό θεώρημα ισχύει:

$$\frac{(\Delta AZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{AZ\cdot A\Delta}{AB\cdot A\Gamma}=\frac{\frac{\beta}{4}\left(\gamma+\frac{\gamma}{2}\right)}{\gamma\cdot\beta}=\frac{\frac{\beta}{4}\cdot\frac{3\gamma}{2}}{\beta\cdot\gamma}=\frac{3}{8}\quad(1).$$

Ομοίως τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{Z\Gamma E}$ και $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχουν παραπληρωματικές τη Γ με τη Γ_1. Άρα:

$$\frac{(Z\Gamma E)}{(AB\Gamma)}=\frac{\Gamma Z\cdot\Gamma E}{\Gamma A\cdot\Gamma B}=\frac{\left(\beta+\frac{\beta}{4}\right)\frac{\alpha}{3}}{\beta\cdot\alpha}=\frac{\frac{5}{4}\beta\cdot\frac{\alpha}{3}}{\beta\cdot\alpha}=\frac{5}{12}\quad(2)$$

Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Delta B E}$ και $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχουν τη $\hat{B}$ με τη $\hat{B}_1$ παραπληρωματικές.

Επομένως $$\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)}=\frac{B\Delta\cdot BE}{BA\cdot B\Gamma}=\frac{\frac{\gamma}{2}\left(\alpha+\frac{\alpha}{3}\right)}{\gamma\cdot\alpha}=\frac{\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{4\alpha}{3}}{\gamma\cdot\alpha}=\frac{2}{3}\quad(3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2), (3):

$$\left.\begin{array}{r}\frac{(\Delta AZ)}{(AB\Gamma)}+\frac{(Z\Gamma E)}{(AB\Gamma)}+\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)}=\frac{3}{8}+\frac{5}{12}+\frac{2}{3}\\ \text{Ακόμα}\quad\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Gamma)}=1\end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}$$

$$\frac{(\Delta AZ)+(Z\Gamma E)+(\Delta BE)+(AB\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\frac{3}{8}+\frac{5}{12}+\frac{2}{3}+1\Leftrightarrow\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{59}{24}$$

ii. $(\Delta EZ)=\frac{59}{24}(AB\Gamma)=\frac{59}{24}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΤΥΠΟΥΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $\gamma = 12$. Να υπολογίσετε :
α. Το εμβαδόν του **β.** Τα ύψη του **γ.** Τις ακτίνες ρ , R , R_α , R_β, R_γ .

2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι $\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma - \rho = 4R$.

3. Αν $(ΑΒΓ) = \frac{\alpha}{2}\sqrt{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ να δείξετε ότι $\beta + \gamma = \alpha\sqrt{2}$.

4. Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με $\tau(\tau - \alpha)$. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ να δειχθούν οι σχέσεις :

α. $E = \rho \cdot R_\beta \cdot \sqrt{\frac{R_\alpha + R_\gamma}{R_\beta - \rho}}$ **β.** $\frac{\beta-\gamma}{R_\alpha} + \frac{\gamma-\alpha}{R_\beta} + \frac{\alpha-\beta}{R_\gamma} = 0$

6. Αν Ο το έγκεντρο τριγώνου ΑΒΓ , να δειχθούν ότι :

α. $(ΑΟ)^2 = \frac{\tau-\alpha}{\tau} \cdot \beta \cdot \gamma$ **β.** $(ΟΑ)(ΟΒ)(ΟΓ) = 4R\rho$

7. Η διχοτόμος ΑΔ της εσωτερικής γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι : $ΜΒ^2 = ΜΑ \cdot ΜΔ = R(R_\alpha - \rho)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΛΟΓΟ ΕΜΒΑΔΩΝ

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδό Ε φέρουμε το ύψος ΑΔ. Από το σημείο Ζ του ΑΔ, για το οποίο είναι $\frac{ΑΖ}{ΖΔ} = \frac{2}{3}$, φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $(ΑΚΛ) = \frac{4}{25}E$.

(**Υπ**: Τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΑΒΓ είναι όμοια)

2. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ και παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $ΓΔ = ΒΓ$, $ΑΕ = ΓΑ$ και $ΒΖ = ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι: $\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = 7$.

(**Υπ**: Να βρείτε ότι $(ΑΕΖ) = 2(ΑΒΓ)$, $(ΒΔΖ) = 2(ΑΒΓ)$ και $(ΓΔΕ) = 2(ΑΒΓ)$)

3. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ για τα οποία ισχύει $ΑΔ=\frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ=\frac{1}{4}ΑΓ$. Να αποδειχθεί ότι $Ε_{ΑΔΕ}=\frac{1}{12}Ε_{ΑΒΓ}$.

(**Υπ**: Αποδείξτε ότι $\frac{Ε_{ΑΔΕ}}{Ε_{ΑΒΓ}}=\frac{1}{12}$)

4. Αν είναι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ και Η το ορθόκεντρο του να αποδειχθεί ότι $\frac{ΗΔ}{υ_α}+\frac{ΗΕ}{υ_β}+\frac{ΗΖ}{υ_γ}=1$.

(**Υπ**: Τα τρίγωνα ΗΒΓ και ΑΒΓ έχουν κοινή βάση τη ΒΓ)

5. Αν είναι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη αμβλυγωνίου τριγώνου με και Η το ορθόκεντρο του να αποδειχθεί ότι $\frac{ΗΔ}{υ_α}-\frac{ΗΕ}{υ_β}-\frac{ΗΖ}{υ_γ}=1$.

(**Υπ**: Τα τρίγωνα ΗΒΓ και ΑΒΓ έχουν κοινή βάση τη ΒΓ)

6. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι $Ε_{ΑΜΝ}=\frac{3}{8}Ε_{ΑΒΓΔ}$.

(**Υπ**: $Ε_{ΑΜΓ}=\frac{1}{2}Ε_{ΑΒΓ}$ κ.λ.π.)

7. Μια ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $Ε^2_{ΑΒΕ}=Ε_{ΑΔΕ}\cdot Ε_{ΑΒΓ}=Ε^2_{ΑΓΔ}$.

(**Υπ**: $\frac{Ε_{ΑΒΕ}}{Ε_{ΑΔΕ}}=\frac{ΑΒ}{ΑΔ}$ κ.λ.π.)

8. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ και παίρνουμε αντίστοιχα τα ευθύγραμμα τμήματα $ΓΔ=ΒΓ$, $ΑΕ=ΓΑ$ και $ΒΖ=ΑΒ$. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΔΕΖ και ΑΒΓ.

(**Υπ**: $Ε_{ΓΔΕ}=2Ε_{ΑΒΓ}$ κ.λ.π.)

9. Να κατασκευαστεί τετράγωνο με εμβαδό τριπλάσιο του εμβαδού δοσμένου τετραγώνου.

(**Απ**: η πλευρά του θα είναι $α\sqrt{3}$)

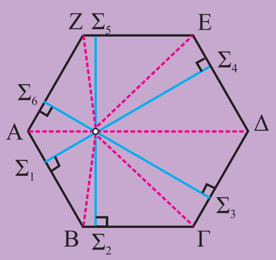
Ε **"ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ"**

Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ τριγώνου παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια, ώστε να είναι $ΑΔ = λ \cdot ΑΒ$, $ΒΕ = λ \cdot ΒΓ$ και $ΓΖ = λ \cdot ΓΑ$, όπου $0 < λ < 1$. Να υπολογιστεί ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΔΕΖ και ΑΒΓ.

(**Απ**: $3λ^2 - 2λ + 1$)

9° μάθημα

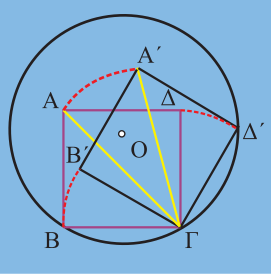
Κανονικά πολύγωνα



4° Κεφάλαιο

10° μάθημα

Μέτρηση κύκλου



Μάθημα 9 Κανονικά πολύγωνα

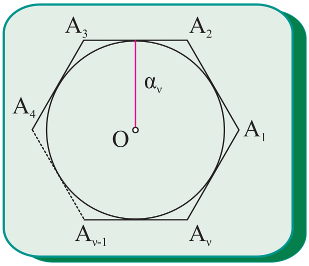
Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ένα κυρτό πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, όταν έχει όλες τις πλευρές ίσες και όλες τις γωνίες ίσες μεταξύ τους.

Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε δύο ομόκεντρους κύκλους.

Χαρακτηριστικά ενός κανονικού πολυγώνου - Ορισμοί

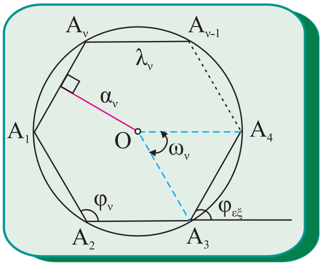
Κέντρο του κανονικού πολυγώνου λέγεται το κοινό κέντρο του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου στο πολύγωνο κύκλου.



Ακτίνα του κανονικού πολυγώνου λέγεται κάθε ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου που καταλήγει σε κορυφή του πολυγώνου. Συνήθως συμβολίζεται με $R_ν$ όπου ν το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.

Απόστημα του κανονικού πολυγώνου λέγεται η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου. Συνήθως συμβολίζεται με $α_ν$.

Γωνία του κανονικού πολυγώνου λέγεται η γωνία που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές πλευρές του. Συμβολίζεται συνήθως με $φ_ν$. Όλες οι γωνίες του κανονικού πολυγώνου είναι ίσες. Η κάθε γωνία $\hat{φ}_ν$ είναι εγγεγραμμένη σε $(ν-2)$ ίσα τόξα. (Το κάθε τόξο αντιστοιχεί σε μια οποιαδήποτε πλευρά του πολυγώνου).



Γι' αυτές ισχύει ο τύπος $\hat{φ}_ν = 180^o - \dfrac{360^o}{ν}$

(ν είναι ο αριθμός των πλευρών του πολυγώνου).

Κεντρική γωνία του κανονικού πολυγώνου λέγεται η γωνία που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές ακτίνες του πολυγώνου. Συμβολίζεται με $\hat{ω}_ν$.

Κάθε κεντρική γωνία είναι επίκεντρη και βαίνει σε τόξο, το οποίο αντιστοιχεί σε μία από τις ίσες πλευρές του πολυγώνου.

Για κάθε μία από τις ίσες κεντρικές γωνίες ισχύει ο τύπος $\hat{\omega}_\nu = \dfrac{360}{\nu}$ όπου ν ο αριθμός των πλευρών του πολυγώνου.

Η κεντρική γωνία και η γωνία του πολυγώνου είναι παραπληρωματικές δηλ. $\hat{\varphi}_\nu + \hat{\omega}_\nu = 180^o$.

Εξωτερική γωνία του κανονικού πολυγώνου λέγεται η οποιαδήποτε γωνία σχηματίζεται από μία πλευρά του πολυγώνου και την προέκταση μιας διαδοχικής πλευράς του.
Όλες οι εξωτερικές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους αφού είναι παραπληρωματικές των αντιστοίχων εσωτερικών ίσων γωνιών.
Για τον ίδιο λόγο η εξωτερική γωνία ισούται με την κεντρική γωνία του πολυγώνου.

Ισχύει δηλ. $\hat{\varphi}_{\varepsilon\xi} = \hat{\omega}_\nu$

Ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων.

• Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

Η γωνία του καθενός είναι $180^0 - \dfrac{360^0}{\nu}$, επομένως έχουν όλες τους τις γωνίες ίσες.

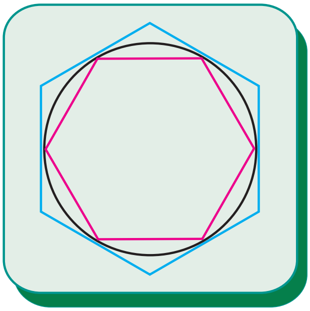
Οι πλευρές τους είναι ανάλογες.
Ο λόγος ομοιότητάς τους ισούται με το λόγο των πλευρών τους, το λόγο των ακτίνων τους, το λόγο των αποστημάτων τους και το λόγο των περιμέτρων τους.

λόγος ομοιότητας	=	**λόγος πλευρών**	=	**λόγος αποστημάτων**	=	**λόγος ακτίνων**	=	**λόγος περιμέτρων**
λ	=	$\dfrac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu}$	=	$\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha'_\nu}$	=	$\dfrac{R}{R'}$	=	$\dfrac{\Pi_\nu}{\Pi'_\nu}$

Ο λόγος των εμβαδών τους ως γνωστόν ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

$$\textbf{λόγος εμβαδών} = \left(\textbf{λόγος ομοιότητας}\right)^2$$

• Κάθε ακτίνα διχοτομεί την αντίστοιχη γωνία κορυφής.



• Αν διαιρέσουμε περιφέρεια κύκλου σε ν ίσα τόξα:

α. οι χορδές που αντιστοιχούν σε αυτά τα τόξα σχηματίζουν κανονικό ν - γωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο.

β. οι εφαπτομένες στα άκρα αυτών των τόξων σχηματίζουν κανονικό ν -γωνο περιγεγραμμένο στον κύκλο.

Τύποι που αυνδέουν τα στοιχεία ενός κανονικού πολυγώνου.

$$\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^{\;2}}{4} = R^2$$

όπου α_ν το απόστημα, λ_ν η πλευρά και R η ακτίνα του πολυγώνου (δηλ. η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου). Ο τύπος αυτός συνδέει την πλευρά με το απόστημα και είναι πολύ χρήσιμος.

$$P_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu$$

όπου P_ν η περίμετρος του ν - γώνου (πολύγωνο με ν πλευρές).

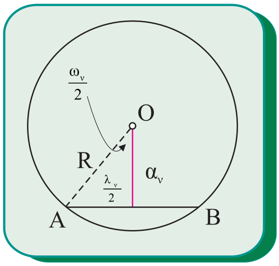
$$E_\nu = \frac{1}{2} P_\nu \cdot \alpha_\nu$$

όπου E_ν το εμβαδόν του πολυγώνου.

$$\lambda_\nu = 2R\eta\mu \frac{\omega_\nu}{2}$$

$$\alpha_\nu = R\sigma\upsilon\nu \frac{\omega_\nu}{2}$$

όπου ω_ν η γωνία του πολυγώνου.
(βλέπε απόδειξη άσκηση 12, σελ. 134)



$$\lambda_{2\nu}^2 = 2R(R - \alpha_\nu)$$

$$\alpha_{2\nu}^2 = \frac{R}{2}(R + \alpha_\nu)$$

Είναι οι τύποι που μας δίνουν την πλευρά και το απόστημα του 2ν - γώνου συναρτήσει της ακτίνας και του αποστήματος του ν - γώνου. (Το 2ν - γωνο έχει διπλάσιο αριθμό πλευρών από το ν - γωνο). **Τύποι του Αρχιμήδη**.

Στοιχεία βασικών κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο με ακτίνα R(συναρτήσει της ακτίνας) και τρόπος κατασκευής τους (ο πίνακας που ακολουθεί).

	Γωνία	Κεντρική γωνία	Πλευρά λ_ν	Απόστημα α_ν	Εγγραφή σε κύκλο
Τετράγωνο	$\hat{\varphi}_4 = 90^o$	$\hat{\omega}_4 = 90^o$	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	Γράφουμε δύο κάθετες διαμέτρους και ενώνουμε τα άκρα τους.
Κανονικό εξάγωνο	$\hat{\varphi}_6 = 120^o$	$\hat{\omega}_6 = 60^o$	$\lambda_6 = R$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	Χωρίζουμε τον κύκλο σε 6 ίσα διαδοχικά τόξα, που η χορδή τους ισούται με την ακτίνα του κύκλου.
Ισόπλευρο τρίγωνο	$\hat{\varphi}_3 = 60^o$	$\hat{\omega}_3 = 120^o$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$	Κατασκευάζουμε κανονικό εξάγωνο και ενώνουμε τις κορυφές του μία παρά μία.
Κανονικό δεκάγωνο	$\hat{\varphi}_{10} = 144^o$	$\hat{\omega}_{10} = 36^o$	$\lambda_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$	$\alpha_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	Χωρίζουμε την ακτίνα του κύκλου σε μέσο και άκρο λόγο. Πλευρά του 10 - γώνου είναι το μεγαλύτερο από αυτά τα τμήματα.
Κανονικό πεντάγωνο	$\hat{\varphi}_5 = 108^o$	$\hat{\omega}_5 = 72^o$	$\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\alpha_5 = \frac{R}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$	Κατασκευάζουμε κανονικό 10 - γωνο και ενώνουμε τις κορυφές του μία παρά μία.
Κανονικό οκτάγωνο	$\hat{\varphi}_8 = 135^o$	$\hat{\omega}_8 = 45^o$	$\lambda_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\alpha_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	Κατασκευάζουμε τετράγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο και παίρνουμε τα μέσα των τόξων που αντιστοιχούν στις πλευρές του. Οι 4 κορυφές του τετραγώνου και τα 4 μέσα των τόξων αποτελούν τις κορυφές του κανονικού οκταγώνου,

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

α. Να βρεθεί η γωνία, η κεντρική γωνία και η εξωτερική γωνία ενός κανονικού:

i. πενταγώνου ii. δεκαγώνου iii. δωδεκαγώνου

β. Ποιο κανονικό ν - γωνο έχει γωνία ίση με:

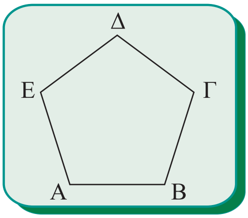
i. 120° ii. 150° iii. 205°

γ. Ποιο κανονικό ν - γωνο έχει κεντρική γωνία ίσε με:

i. 18° ii. 6°

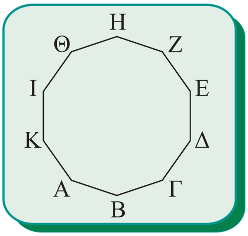
Λύση

α. Για τη γωνία $\hat{\varphi}_\nu$ ενός κανονικού ν - γώνου ισχύει $\hat{\varphi}_\nu = 180^o - \frac{360^o}{\nu}$ ενώ για την κεντρική γωνία $\hat{\omega}_\nu$ ισχύει $\hat{\omega}_\nu = \frac{360^o}{\nu}$. Έτσι έχουμε:



i $\hat{\varphi}_5 = 180^o - \frac{360^o}{5} = 108^o$ και $\hat{\omega}_5 = \frac{360^o}{5} = 72^o$.

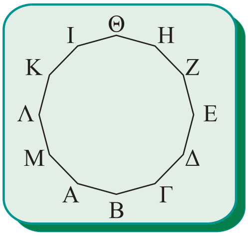
Η εξωτερική γωνία ισούται με την κεντρική.



ii. $\hat{\varphi}_{10} = 180^o - \frac{360^o}{10} = 144^o$

$\hat{\omega}_{10} = \frac{360^o}{10} = 36^o$

$\hat{\varphi}_{\varepsilon\xi} = 36^o$



iii. $\hat{\varphi}_{12} = 180^o - \frac{360^o}{12} = 150^o$

$\hat{\omega}_{12} = \frac{360^o}{12} = 30^o$

$\hat{\varphi}_{\varepsilon\xi} = 30^o$.

β. i. Είναι

$$\hat{\varphi}_\nu = 180^o - \frac{360^o}{\nu} \Leftrightarrow 120^o = 180^o - \frac{360^o}{\nu} \Leftrightarrow \frac{360^o}{\nu} = 60^o \Leftrightarrow \nu = 6.$$

Άρα το 6 - γωνο έχει γωνία 120°.

ii. $150^o = 180^o - \frac{360^o}{\nu} \Leftrightarrow \frac{360^o}{\nu} = 30^o \Leftrightarrow \nu = 12$.

Δηλ. το 12 - γωνο έχει γωνία 150°.

iii. $205^o = 180 - \frac{360^o}{\nu} \Rightarrow \nu = 14,4$

Επομένως δεν υπάρχει ν - γωνο με γωνία 205°. (πρέπει το ν να είναι ακέραιος).

γ. Είναι $\hat{\omega}_\nu = \frac{360^o}{\nu}$

i. $18^o = \frac{360^o}{\nu} \Leftrightarrow \nu = 20$ δηλ. το 20 - γωνο έχει κεντρική γωνία 18°.

ii. $6^o = \frac{360^o}{\nu} \Leftrightarrow \nu = 60$. Επομένως το 60 - γωνο έχει κεντρική γωνία 6°.

Άσκηση 2

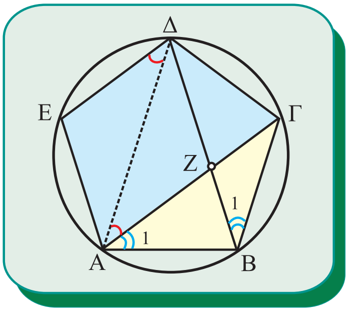
Σε κάθε κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ να αποδείξετε ότι:

α. κάθε διαγώνιος χωρίζει το πεντάγωνο σε ένα ισοσκελές τραπέζιο και σε ένα ισοσκελές τρίγωνο.

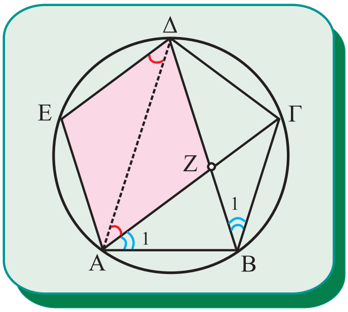
β. από τα σχήματα, στα οποία χωρίζεται τα πεντάγωνο με δύο διαγωνίους του που δεν έχουν κοινό άκρο, το ένα είναι ρόμβος.

γ. αν Ζ είναι το σημείο τομής της ΑΓ με τη ΒΔ, τότε είναι $ΑΖ^2 = ΑΓ \cdot ΖΓ$.

Λύση



α. Θεωρούμε την διαγώνιο ΑΓ του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ. Τότε αυτή χωρίζει το πεντάγωνο στο τετράπλευρο ΑΓΔΕ και στο τρίγωνο ΑΒΓ.
Επειδή το πεντάγωνο είναι κανονικό θα ισχύει: $ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΑ$.
Αφού ΑΒ = ΒΓ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Ακόμη επειδή το πεντάγωνο είναι κανονικό θα είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
Είναι ΓΔ = ΕΑ συνεπώς $\overset{\frown}{ΓΔ} = \overset{\frown}{ΕΑ}$. Αν λοιπόν φέρουμε βοηθητικά την ΑΔ οι εγγεγραμμένες γωνίες $Γ\hat{Α}Δ, Ε\hat{Δ}Α$ θα είναι ίσες. Επομένως ΑΓ // ΕΔ γιατί έχουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους $Γ\hat{Α}Δ, Ε\hat{Δ}Α$ ίσες. Άρα το ΑΓΔΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



β. Θεωρούμε τις διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ του κανονικού πενταγώνου, ΑΒΓΔΕ οι οποίες έστω ότι τέμνονται στο Ζ. Όμοια με το προηγούμενο ερώτημα μπορούμε να αποδείξουμε ότι ΑΓ // ΕΔ και ΒΔ // ΕΑ. Άρα το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.
Επειδή ακόμη ισχύει ΔΕ = ΕΑ συμπεραίνουμε ότι το ΑΖΔΕ είναι ρόμβος.

γ. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΖΒΓ έχουν τη γωνία τους $\hat{Γ}$ κοινή και $\hat{Α}_1 = \hat{Β}_1$ (εγγεγραμμένες που

βαίνουν στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{ΒΓ}, \overset{\frown}{ΓΔ}$ αντίστοιχα).

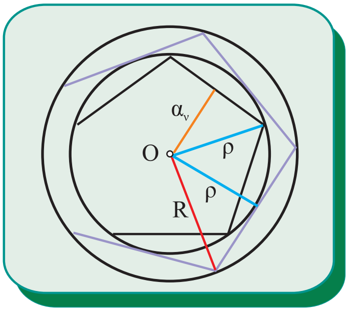
Άρα ισχύει $Α\hat{Β}Γ \sim Ζ\hat{Β}Γ$ και έχουμε : $\frac{ΒΓ}{ΖΓ} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} \Leftrightarrow ΒΓ^2 = ΑΓ \cdot ΖΓ$

Στο προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε ότι το ΑΖΔΕ είναι ρόμβος. Άρα ισχύει $ΑΖ = ΔΕ = ΒΓ$ και η τελευταία ισότητα γίνεται: $ΑΖ^2 = ΑΓ \cdot ΖΓ$.

Άσκηση 3

Αν ένα κανονικό ν-γωνο είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,ρ) και εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) και $α_ν$ είναι το απόστημα κανονικού ν-γωνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο,ρ), να δείξετε ότι: $Rα_ν = ρ^2$.

Λύση



Γνωρίζουμε το θεώρημα "Αν δύο κανονικά πολύγωνα έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών, είναι όμοια και τότε ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ίσος με το λόγο των αποστημάτων τους και με το λόγο των ακτίνων τους".

- Το κανονικό ν-γωνο που είναι περιγεγραμμένο στον κύκλο (Ο,ρ) και εγγεγραμμένο στον κύκλο (Ο,R) έχει ακτίνα R και απόστημα ρ.

- Το κανονικό ν-γωνο που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Ο,ρ) έχει ακτίνα ρ και απόστημα $α_ν$.

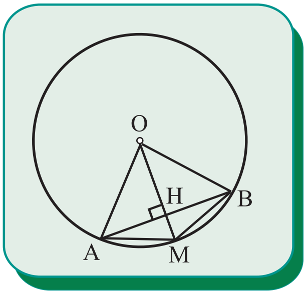
Σύμφωνα με το θεώρημα τα δύο κανονικά ν-γωνα είναι όμοια και ο λόγος των αποστημάτων τους είναι ίσος με το λόγο των ακτίνων τους. Δηλαδή έχουμε:

$$\frac{ρ}{α_ν} = \frac{R}{ρ} \Leftrightarrow Rα_ν = ρ^2$$

Άσκηση 4

Να δειχτεί ότι το εμβαδόν $Ε_{2ν}$ ενός κανονικού 2ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R) είναι $Ε_{2ν} = \frac{1}{2}P_ν R$ όπου $P_ν$ είναι η περίμετρος του κανονικού ν-γώνου ακτίνας R.

Λύση



Έστω ΑΒ μια πλευρά του εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο,R) κανονικού ν-γώνου. Τότε θα ισχύει $ΑΒ = λ_ν$.
Επειδή το κανονικό 2ν-γωνο είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο (Ο, R), αν Μ είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$ θα ισχύει $ΑΜ = ΜΒ = λ_{2ν}$.
Όπως γνωρίζουμε η ΟΜ είναι κάθετη στην ΑΒ και διέρχεται από το μέσο της Η.
Επομένως το τρίγωνο ΟΑΜ έχει εμβαδό:

$$(OAM)=\frac{1}{2}OM\cdot AH=\frac{1}{2}OM\cdot\frac{AB}{2}=\frac{1}{4}AB\cdot OM=\frac{1}{4}\lambda_\nu\cdot R\,.$$

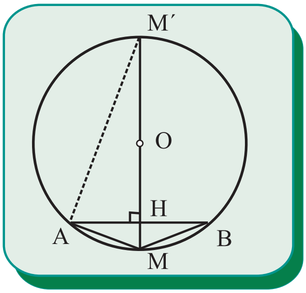
Άρα το εμβαδό $E_{2\nu}$ του κανονικού 2ν-γωνου είναι:

$$E_{2\nu}=2\nu(OAM)=2\nu\frac{1}{4}\lambda_\nu\cdot R=\frac{1}{2}\nu\lambda_\nu\cdot R=\frac{1}{2}P_\nu\cdot R$$

Άσκηση 5

Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R την πλευρά και το απόστημα ενός κανονικού 12-γωνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R).

Λύση



Έστω ότι στον κύκλο (O,R) εγγράψαμε κανονικό εξάγωνο και A, B είναι δύο διαδοχικές κορυφές αυτού. Τότε θα ισχύει $AB=\lambda_6=R$.

Αν M είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ τότε έχουμε: $AM=MB=\lambda_{12}$.

Θεωρούμε την διάμετρο MM΄ του κύκλου (O,R) καθώς και την χορδή του AM΄. Τότε η γωνία $M\hat{A}M'$ είναι ορθή γιατί βαίνει σε ημικύκλιο.

Ακόμη επειδή το OH είναι απόστημα της χορδής AB είναι $AH\perp MM'$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AMM΄ έχουμε:

$$AM^2=MM'\cdot MH\Leftrightarrow AM^2=MM'(OM-OH)\Leftrightarrow$$

$$\lambda_{12}^2=2R(R-\alpha_6)\Leftrightarrow\lambda_{12}^2=2R\left(R-\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\lambda_{12}^2=R^2\left(2-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow\lambda_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Ακόμη από τον τύπο $\alpha_\nu^2+\frac{\lambda_\nu^2}{4}=R^2$ έχουμε:

$$\alpha_{12}^2=R^2-\frac{\lambda_{12}^2}{4}\Leftrightarrow\alpha_{12}^2=R^2-\frac{R^2\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}\Leftrightarrow$$

$$\alpha_{12}^2=\frac{R^2}{4}\left(4-2+\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow\alpha_{12}^2=\frac{R^2}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow$$

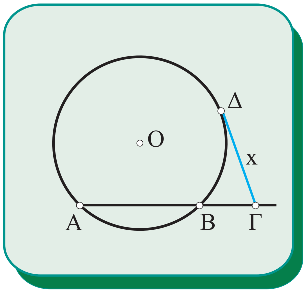
$$\alpha_{12}=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Επομένως ισχύει: • $\lambda_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ • $\alpha_{12}=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Άσκηση 6

Δίνεται ένας κύκλος (O,R) και μια χορδή του AB ίση προς την πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R). Στην ημιευθεία AB θεωρούμε ένα σημείο Γ, τέτοιο ώστε ΓΑ = 2R. Αν ΓΔ = x είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R) , να δείξετε ότι $x = \lambda_8\sqrt{2}$, όπου λ_8 είναι η πλευρά κανονικού οκταγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R). (Δίνεται $\lambda_8 = R\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$).

Λύση



Η πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R) είναι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$. Άρα ισχύει $AB = R\sqrt{2}$.
Από το Γ έχουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ και την τέμνουσα AB προς τον κύκλο (O,R).
Από γνωστό θεώρημα έχουμε:

$$\Gamma\Delta^2 = \Gamma A\cdot\Gamma B \Leftrightarrow \Gamma\Delta^2 = \Gamma A(\Gamma A - AB) \Leftrightarrow$$

$$\Gamma\Delta^2 = \Gamma A^2 - \Gamma A\cdot AB \Leftrightarrow x^2 = (2R)^2 - 2R\cdot R\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 2R^2\left(2-\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{2}\cdot R\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

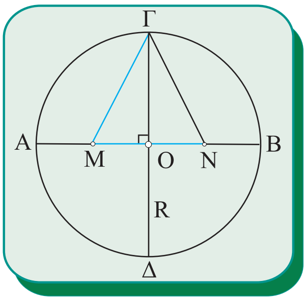
Όμως $\lambda_8 = R\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Επομένως ισχύει και $x = \sqrt{2}\cdot\lambda_8$.

Άσκηση 7

Θεωρούμε έναν κύκλο (O,R) και δύο κάθετες διαμέτρους του AB, ΔΓ. Αν M είναι το μέσο του OA και N σημείο του OB, τέτοιο ώστε να είναι MN = MΓ, να δείξετε ότι $N\Gamma = \lambda_5$, $ON = \lambda_{10}$, όπου λ_5, λ_{10} είναι οι πλευρές κανονικού πενταγώνου και κανονικού δεκαγώνου που έχουν ακτίνα R.

$$\left[\text{Δίνονται: } \lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},\ \lambda_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right].$$

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΓ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$M\Gamma^2 = O\Gamma^2 + OM^2 \Leftrightarrow M\Gamma^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow M\Gamma^2 = \frac{5R^2}{4} \Leftrightarrow M\Gamma = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$. Άρα $MN = M\Gamma = \frac{R\sqrt{5}}{2}$

- Στο τρίγωνο ΓΜΝ σύμφωνα με την γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$N\Gamma^2 = MN^2 + M\Gamma^2 - 2MN \cdot OM \Leftrightarrow N\Gamma^2 = \frac{5R^2}{4} + \frac{5R^2}{4} - 2\frac{R\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{R}{2} \Leftrightarrow$$

$$N\Gamma^2 = \frac{10R^2}{4} - \frac{2R^2\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow N\Gamma^2 = \frac{R^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow$$

$$N\Gamma = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \lambda_5$$

- Ακόμη έχουμε: $ON = MN - OM = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = \lambda_{10}$.

Άσκηση 8

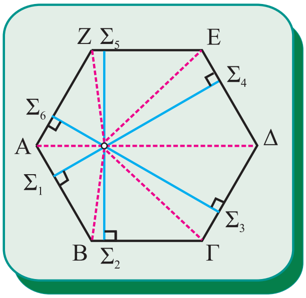
Δίνεται ένα κανονικό εξάγωνο με πλευρά α και ένα σημείο Σ στο εσωτερικό του. Να υπολογίσετε συναρτησει του α το άθροισμα των αποστάσεων του Σ από τις πλευρές του εξαγώνου.

Λύση

Έστω ΑΒΓΔΕΖ το δεδομένο κανονικό εξάγωνο και Ο το κέντρο του.

Τότε όπως γνωρίζουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ, ΟΔΕ, ΟΕΖ, ΟΖΑ είναι ισόπλευρα με πλευρά α. (Στο σχήμα δεν σημειώνονται).

Άρα το κανονικό εξάγωνο έχει εμβαδό:



$$(AB\Gamma\Delta EZ) = 6(OAB) = 6\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2}$$

Έστω $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_6$ οι προβολές του Σ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ του εξαγώνου αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

$$(\Sigma AB) + (\Sigma B\Gamma) + (\Sigma\Gamma\Delta) + (\Sigma\Delta E) + (\Sigma EZ) + (\Sigma ZA) = (AB\Gamma\Delta EZ) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\alpha\Sigma\Sigma_1 + \frac{1}{2}\alpha\Sigma\Sigma_2 + \frac{1}{2}\alpha\Sigma\Sigma_3 + \frac{1}{2}\alpha\Sigma\Sigma_4 + \frac{1}{2}\alpha\Sigma\Sigma_5 + \frac{1}{2}\alpha\Sigma\Sigma_6 = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

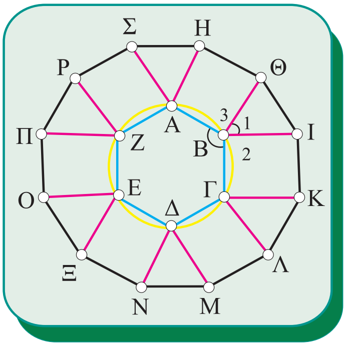
$$\frac{1}{2}\alpha\left(\Sigma\Sigma_1 + \Sigma\Sigma_2 + \Sigma\Sigma_3 + \Sigma\Sigma_4 + \Sigma\Sigma_5 + \Sigma\Sigma_6\right) = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Sigma\Sigma_1 + \Sigma\Sigma_2 + \Sigma\Sigma_3 + \Sigma\Sigma_4 + \Sigma\Sigma_5 + \Sigma\Sigma_6 = 3\alpha\sqrt{3}.$$

Άσκηση 9

Επάνω στις πλευρές κανονικού εξαγώνου εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνα. Να αποδειχθεί ότι οι κορυφές των τετραγώνων που δεν είναι κορυφές του εξαγώνου είναι κορυφές κανονικού δωδεκαγώνου και να υπολογισθεί ο λόγος των εμβαδών του εξαγώνου προς το δωδεκάγωνο δηλαδή $\frac{E_{\varepsilon\xi}}{E_{\delta\omega\delta}}$.

Λύση



Όλα τα τετράγωνα έχουν ίσες πλευρές. Επομένως το τρίγωνο ΒΘΙ είναι ισοσκελές.
Η γωνία του κανονικού εξαγώνου είναι:

$$\varphi_6 = 180 - \frac{360}{6} = 120^0 .$$

Οι γωνίες $\hat{B}_3$ και $\hat{B}_2$ είναι ορθές. Επομένως $\hat{B}_1 = 60^0$,

δηλ. το τρίγωνο $B\hat{\Theta}I$ είναι ισόπλευρο και $\Theta I = \lambda_6 = R$.
Επομένως όλες οι πλευρές του δωδεκαγώνου είναι ίσες.
Πρέπει να δείξουμε ότι και οι γωνίες του είναι ίσες. Αυτό ισχύει αφού: $\Theta\hat{I}K = \Theta\hat{I}B + B\hat{I}K = 60^0 + 90^0 = 150^o$. Επομένως το δωδεκάγωνο είναι κανονικό αφού έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες ίσες.
Το εμβαδόν του ισούται με το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου συν τα εμβαδά 6 τετραγώνων συν τα εμβαδά 6 ισόπλευρων τριγώνων. Επομένως

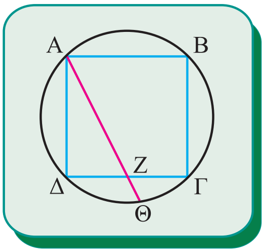
$$E = E_{\varepsilon\xi} + 6E_{\tau\varepsilon\tau\rho} + 6E_{\tau\rho\iota\gamma} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} + 6R^2 + 6\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = 3R^2\sqrt{3} + 6R^2 = 3R^2\left(\sqrt{3}+2\right)$$

Άρα $$\frac{E_{\varepsilon\xi}}{E_{\delta\omega\delta}} = \frac{\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}}{3R^2\left(\sqrt{3}+2\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}+2\right)} .$$

Άσκηση 10

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (0,R). Έστω Ζ το μέσον της ΓΔ. Η ΑΖ τέμνει την περιφέρεια του κύκλου στο Θ. Να υπολογισθεί το τμήμα ΖΘ.

Λύση



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΖ έχουμε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$AZ^2 = A\Delta^2 + \Delta Z^2 \Leftrightarrow AZ^2 = \lambda_4{}^2 + \left(\frac{\lambda_4}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AZ = \frac{\lambda_4\sqrt{5}}{2} .$$

Οι ΑΘ και ΓΔ είναι δύο χορδές του κύκλου και σύμφωνα με γνωστή μετρική σχέση έχουμε:

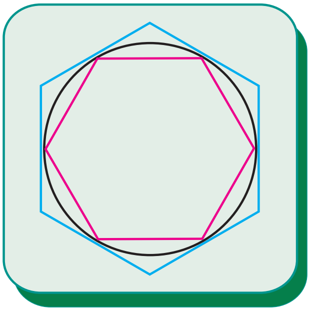
$$AZ \cdot Z\Theta = Z\Delta \cdot Z\Gamma \Leftrightarrow \frac{\lambda_4\sqrt{5}}{2} \cdot Z\Theta = \frac{\lambda_4}{2} \cdot \frac{\lambda_4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Z\Theta = \frac{\lambda_4}{2\sqrt{5}} = \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{R\sqrt{10}}{20}$$

Άσκηση 11

Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών δύο κανονικών εξαγώνων από τα οποία το ένα είναι εγγεγραμμένο και το άλλο περιγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο.

Λύση



Τα δύο εξάγωνα είναι όμοια, αφού είναι κανονικά και έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών. Όπως γνωρίζουμε, ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων πολυγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Λόγος ομοιότητας είναι ο λόγος δύο πλευρών ή δύο αποστημάτων. Έτσι έχουμε:

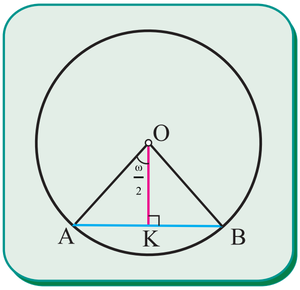
$$\frac{E}{E'} = \left(\frac{\alpha_6}{\alpha'_6}\right)^2 = \frac{\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}{R^2} = \frac{R^2\sqrt{3}^2}{4R^2} = \frac{3}{4}$$

Παρατηρήστε ότι το απόστημα του περιγεγραμμένου εξαγώνου είναι ακτίνα του κύκλου.

Άσκηση 12

Να υπολογισθεί η πλευρά λ_ν και το απόστημα α_ν κανονικού ν-γώνου συναρτήσει της κεντρικής του γωνίας και της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου.

Λύση



Έστω $AB = \lambda_\nu$ η πλευρά του κανονικού ν-γώνου και $OK = \alpha_\nu$ το απόστημα του ν-γώνου.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $O\hat{K}A$ έχουμε:

$$\eta\mu\frac{\omega}{2} = \frac{AK}{OA} = \frac{\frac{\lambda_\nu}{2}}{R} = \frac{\lambda_\nu}{2R}$$

Επομένως: $\lambda_\nu = 2R\eta\mu\frac{\omega}{2}$

Ακόμα: $\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} = \frac{OK}{OA} = \frac{\alpha_\nu}{R}$ δηλ. $\alpha_\nu = R\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}$

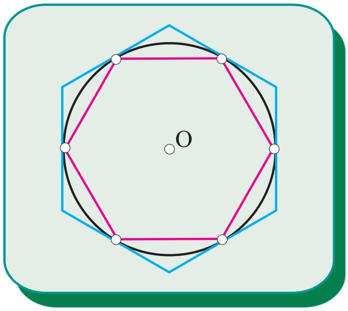
Άσκηση 13

Να περιγραφεί κανονικό εξάγωνο σε κύκλο (0,R). Στη συνέχεια να υπολογισθεί η πλευρά του και το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας R.

Λύση

Έστω κύκλος (0,R). Εγγράφουμε σε αυτόν ένα κανονικό εξάγωνο. Στις κορυφές του εξαγώνου αυτού, οι οποίες είναι σημεία του κύκλου, φέρνουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου. Έτσι σχηματίζεται το εξάγωνο το περιγεγραμμένο στον κύκλο. (Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε οποιοδήποτε ν-γωνο περιγεγραμμένο σε κύκλο, αρκεί να έχουμε πρώτα κατασκευάσει το αντίστοιχο ν-γωνο το εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο).

Τα δύο εξάγωνα είναι όμοια αφού είναι κανονικά.
Έτσι:



$$\frac{\lambda_6}{\lambda'_6}=\frac{\alpha_6}{\alpha'_6}\Leftrightarrow\frac{R}{\lambda'_6}=\frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R}\Leftrightarrow\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\lambda'_6=R^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lambda'_6=\frac{2R}{\sqrt{3}}=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

(είναι $\alpha'_6=R$).

Για το εμβαδόν έχουμε: $E_6=\frac{1}{2}P'_6\cdot\alpha'_6=\frac{1}{2}6\lambda'_6\cdot\alpha'_6=\frac{1}{2}6\frac{2R\sqrt{3}}{3}R=2R^2\sqrt{3}$.

Άσκηση 14

Σε κύκλο (0,R) εγγράφουμε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς λ_3 και τετράγωνο πλευράς λ_4 για τα οποία ισχύει $\lambda_4+\lambda_3=10$. Να υπολογιστεί η ακτίνα R του κύκλου και τα αποστήματά τους.

Λύση

Είναι $\lambda_3=R\sqrt{3}$ και $\lambda_4=R\sqrt{2}$.

Οπότε: $\lambda_4+\lambda_3=10\Leftrightarrow R\sqrt{3}+R\sqrt{2}=10\Leftrightarrow R=\frac{10}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\Leftrightarrow R=10\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

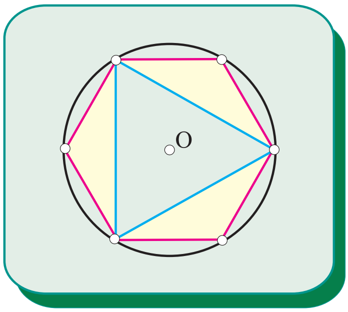
Για τα αποστήματα έχουμε: $\alpha_3=\frac{R}{2}$ δηλαδή $\alpha_3=5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

και $\alpha_4=\frac{R\sqrt{2}}{2}=5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

Επομένως $\alpha_4=5\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

Άσκηση 15

Σε κύκλο (0,R) με R = 2, εγγράφουμε κανονικό εξάγωνο. Με τρεις από τις 6 κορυφές του, κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο (όπως στο σχήμα). Να υπολογιστεί το εμβαδόν των τμημάτων του εξαγώνου που βρίσκονται εκτός του τριγώνου (γραμμοσκιασμένα).



Λύση

Για το εμβαδόν του εξαγώνου ισχύει:

$$E_6=\frac{1}{2}6\lambda_6\cdot\alpha_6=3R\frac{R\sqrt{3}}{2}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

Για το εμβαδόν του τριγώνου ισχύει:

$$E_3 = \frac{\lambda_3^{\,2}\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(R\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Έστω Ε το ζητούμενο εμβαδόν

$$E = E_6 - E_3 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$$

Γ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της πρότασης και δίπλα σ' αυτόν την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) που χαρακτηρίζει την πρόταση.

α. Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου και η κεντρική του γωνία είναι παραπληρωματικές.

β. Δύο πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

γ. Ένα κυρτό πολύγωνο που έχει όλες του τις γωνίες ίσες είναι κανονικό.

δ. Ένα κυρτό πολύγωνο που έχει όλες του τις πλευρές ίσες είναι κανονικό.

ζ. Η κεντρική γωνία ενός κανονικού ν-γώνου δίνεται από τον τύπο $\hat{\omega}_\nu = \frac{360^0}{\nu}$.

η. Ο τύπος $4\alpha_\nu^2 = 4R^2 - \lambda_\nu^2$ συνδέει την πλευρά λ_ν, το απόστημα α_ν και την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου κανονικού ν-γώνου.

2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα σ' αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Ι. Το κανονικό πολύγωνο, που η εξωτερική του γωνία είναι ορθή, είναι:

Α. ισόπλευρο τρίγωνο **Β.** τετράγωνο
Γ. κανονικό πεντάγωνο **Δ.** κανονικό εξάγωνο
Ε. κανονικό δεκάγωνο

ΙΙ. Το κανονικό πολύγωνο, που η εξωτερική του γωνία είναι αμβλεία, είναι:

Α. ισόπλευρο τρίγωνο **Β.** τετράγωνο
Γ. πεντάγωνο **Δ.** εξάγωνο
Ε. οκτάγωνο

ΙΙΙ. Εάν η κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R, είναι 60^0, τότε η πλευρά του (συναρτήσει του R) είναι:

Α. $\frac{R}{2}$ **Β.** $R\sqrt{3}$ **Γ.** $2R$ **Δ.** $R\sqrt{2}$ **Ε.** R

IV. Αν $\hat{\varphi}_\nu$ είναι μία από τις ίσες γωνίες ενός κανονικού ν-γώνου τότε $\hat{\varphi}_\nu$ ισούται με:

Α. $180^0 + \frac{360^0}{\nu}$ **Β.** $180^0 - \frac{360^0}{\nu}$ **Γ.** $360^0 - \frac{180^0}{\nu}$

Δ. $360^0 + \frac{180^0}{\nu}$ **Ε.** $\frac{360^0}{\nu}$

V. Η πλευρά λ_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι:

Α. $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$ **Β.** R **Γ.** $R\sqrt{2}$ **Δ.** $R^2\sqrt{2}$ **Ε.** $\frac{1}{3}R\sqrt{2}$

VI. Το κανονικό πολύγωνο με γωνία 108^0 είναι:
Α. τετράγωνο **Β.** πεντάγωνο **Γ.** εξάγωνο
Δ. οκτάγωνο **Ε.** δεκάγωνο

VII. Το απόστημα α_3 ισοπλεύρου τριγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι:

Α. $\frac{1}{2}R\sqrt{3}$ **Β.** $\frac{R\sqrt{3}}{3}$ **Γ.** $\frac{1}{2}R$ **Δ.** $R\sqrt{3}$ **Ε.** $\frac{R\sqrt{3}}{4}$

IX. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

ν: πλήθος πλευρών κανονικού πολυγώνου	**λ_ν: πλευρά κανονικού ν-γώνου**	**α_ν: απόστημα κανονικού ν-γώνου**	**E_ν: εμβαδόν κανονικού ν-γώνου**
3			
4			
6			

3. Το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι $12\sqrt{3}cm^2$. Να βρεθεί η πλευρά και το εμβαδόν του εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο τετραγώνου.

4. Το εμβαδόν του τετραγώνου του εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R) είναι κατά $(8-3\sqrt{3})cm^2$ μεγαλύτερο του εμβαδού του εγγεγραμμένου ισοπλεύρου τριγώνου. Να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου και εμβαδά των πολυγώνων.

5. Να υπολογισθούν τα E_8, E_5, E_{12} στα αντίστοιχα πολύγωνα τα εγγεγραμμένα σε κύκλο (O, R).

6. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^0\right)$. Με πλευρές β, γ, α κατασκευάζουμε κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών, που έχουν εμβαδά αντίστοιχα $E_\beta, E_\gamma, E_\alpha$. Να αποδειχθεί ότι: $E_\beta + E_\gamma = E_\alpha$ (1).

7. Δίνεται κανονικό εξάγωνο $A_1A_2...A_6$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Αν Μ είναι το μέσο της χορδής A_2A_3 και η ευθεία A_1M τέμνει τον κύκλο στο Ρ, να αποδείξετε ότι: $A_1M = 7 \cdot MP$.

8. Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB} = 60^0, \overset{\frown}{B\Gamma} = 90^0, \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 120^0$. Να βρεθεί το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

9. Δίνεται κύκλος (O,R) και χορδή του $B\Gamma = 1 + \sqrt{2}$. Φέρνουμε δύο χορδές ΒΖ και ΓΕ του κύκλου οι οποίες τέμνονται στο Α ώστε $AZ = \lambda_4$ και $AE = \lambda_6$.

i .Δείξτε ότι $(ABE) = \frac{1}{2}(A\Gamma Z)$

ii. Αν ΑΔ διχοτόμος του τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$ να υπολογίσετε τα τμήματα ΔΒ και ΔΓ.

10. Δίνεται κύκλος (O,R) και χορδή $\Gamma\Delta = \lambda_6$. Φέρνουμε τυχαία ευθεία ε που διέρχεται από το κέντρο Ο και εκατέρωθεν του Ο παίρνουμε σημεία Α, Β ώστε $OA = OB = \alpha_3$. Αν Μ μέσον της ΓΔ δείξτε ότι $MA^2 + MB^2 = \lambda_4^2$.

11. Δίνεται κύκλος (O, R) και διάμετρος ΒΓ. Προς το ίδιο μέρος της ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Η του κύκλου ώστε: $B\Delta = \lambda_6$, $\Gamma H = \lambda_{12}$. Αν οι χορδές ΒΗ και ΓΔ τέμνονται στο Α τότε:

i. Δείξτε ότι $AB = \lambda_4$

ii. $\alpha = \left(1 + \sqrt{3}\right)\beta$ όπου α, β οι πλευρές του $A\hat{B}\Gamma$

iii. Να υπολογιστεί το λ_{12} συναρτήσει του R.

12. Έστω κανονικό ν-γωνο ΑΒΓΔ... Αν ΒΕ η διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{B}E = 135^0$ να βρεθεί το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου.

13. Σε κανονικό δεκάγωνο ΑΒΓΔ... η προέκταση της πλευράς ΑΒ τέμνει το φορέα της ακτίναις ΟΓ σε σημείο Μ. Δείξτε ότι: ΑΜ = ΑΔ.

Ε. "ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ"

1. Κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν Μ μέσο ΑΒ και η ΓΜ τέμνει τον κύκλο στο Η, δείξτε ότι : $(HAB)=\frac{1}{42}(AB\Gamma\Delta EZ)$.

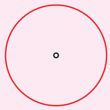
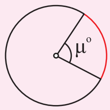
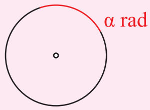
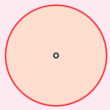
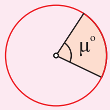
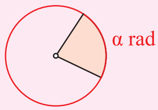
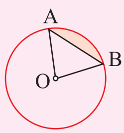
2. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και χορδή του ΑΒ = λ_3. Αν Μ σημείο του κυρτογώνιου τόξου ΑΒ ώστε ΑΜ=2 και ΜΒ = 5 να υπολογισθεί η ακτίνα R του κύκλου.

3. Κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν Κ, Μ μέσα των ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου $\overset{\triangle}{AKM}$.

Μάθημα 10

Μέτρηση κύκλου

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Μήκος κύκλου		$L = 2\pi R$
Μήκος τόξου μ°		$\ell = \dfrac{\pi R \mu}{180}$
Μήκος τόξου α rad		$\ell = \alpha \cdot R$
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου		$E = \pi R^2$
Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ°		$E = \dfrac{\pi R^2 \mu}{360}$
Εμβαδόν κυκλικού τομέα α rad		$E = \dfrac{1}{2}\alpha R^2$
Εμβαδόν κυκλικού τμήματος		$E = E_{τομ.OAB} - E_{τρ.AOB}$

Β. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Το μήκος ενός τόξου κύκλου με ακτίνα R = 12 είναι S = 3π. Να βρείτε πόσων μοιρών είναι το τόξο.

Λύση

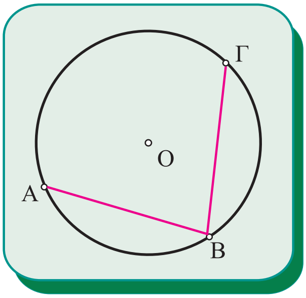
Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι το μήκος S ενός τόξου μ^0 κύκλου ακτίνας R, δίνεται από τον τύπο: $S = \frac{\pi R \mu}{180}$.

Άρα με αντικατάσταση όπου $S = 3\pi$ και $R = 12$ παίρνουμε: $3\pi = \frac{\pi \cdot 12\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 45^0$.

Άσκηση 2

Δίνεται ένας κύκλος (Ο,R) και διαδοχικά τα σημεία του Α,Β,Γ, ώστε να είναι $AB = R\sqrt{2}, B\Gamma = R\sqrt{3}$. Να βρεθούν τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma A}$ ως συνάρτηση του R.

Λύση



Όπως γνωρίζουμε ένα τετράγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένα σε κύκλο (Ο,R) έχουν πλευρές: $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, $\lambda_3 = R\sqrt{3}$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι χορδές ΑΒ, ΒΓ του κύκλου (Ο,R) είναι πλευρές τετραγώνου και ισοπλεύρου τριγώνου, εγγεγραμμένα στον κύκλο αυτό αντίστοιχα.

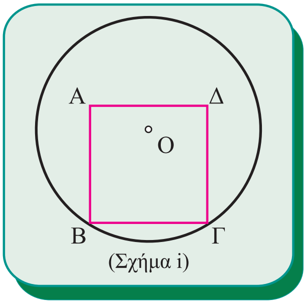
Επειδή το τετράγωνο έχει κεντρική γωνία $\widehat{\omega_4} = 90^0$ και το ισόπλευρο τρίγωνο έχει κεντρική γωνία $\widehat{\omega_3} = 120^0$ συμπεραίνουμε ότι: $\begin{cases} \overset{\frown}{AB} = 90^0 \\ \overset{\frown}{B\Gamma} = 120^0 \end{cases}$

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι το μήκος S ενός τόξου μ^0 κύκλου ακτίνας R, δίνεται από τον τύπο: $S = \frac{\pi R \mu}{180}$.

- Άρα το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι: $S_1 = \frac{\pi R 90}{180} = \frac{\pi}{2} R$.
- Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι: $S_2 = \frac{\pi R 120}{180} = \frac{2\pi}{3} R$
- Το μήκος το τόξου $\overset{\frown}{\Gamma A}$ επειδή ισχύει: $\overset{\frown}{\Gamma A} = 360^0 - \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{B\Gamma} = 360^0 - 90^0 - 120^0 = 150^0$

είναι: $S_3 = \dfrac{\pi R 150}{180} = \dfrac{5\pi}{6} R$.

Άσκηση 3



(Σχήμα i)

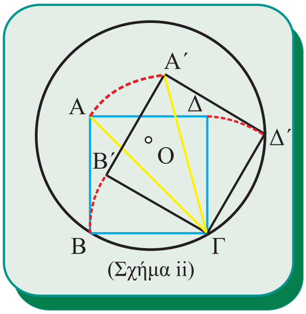
Δίνεται ένας κύκλος (Ο,R = 1) και ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 1, τοποθετημένο, όπως φαίνεται στο σχήμα i. Στρέφουμε το τετράγωνο γύρο από το σημείο Γ κατά τη φορά στροφής των δεικτών ενός ρολογιού μέχρι το Δ να γίνει σημείο του κύκλου. Να βρεθεί το μήκος του τόξου που διαγράφεται από το Α.

Λύση

Έστω Α΄, Β΄, Δ΄ οι νέες κορυφές του τετραγώνου ΑΒΓΔ όταν στραφεί γύρο από το σημείο Γ (Βλέπε σχήμα ii).

Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο τόξο $\overset{\frown}{AA'}$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα ΑΓ. Αφού η ΑΓ είναι διαγώνιος του τετραγώνου, έχουμε:

$$A\Gamma = AB \cdot \sqrt{2} = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} .$$



(Σχήμα ii)

Όπως γνωρίζουμε η πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R) είναι $\lambda_6 = R$.

Επειδή λοιπόν ισχύει ΒΓ = ΓΔ΄ = R συμπεραίνουμε ότι οι χορδές ΒΓ, ΓΔ΄ είναι διαδοχικές πλευρές κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο,R). Άρα η γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta'$ είναι γωνία κανονικού εξαγώνου και ισχύει:

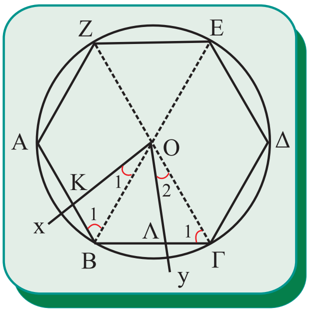
$$B\hat{\Gamma}\Delta' = \hat{\varphi}_6 = 180^0 - \frac{360^0}{6} = 120^0$$

Επειδή οι διαγώνιες του τετραγώνου διχοτομούν τις γωνίες του, έχουμε: (σχήμα ii)

$$A\hat{\Gamma}A' = B\hat{\Gamma}\Delta' - A\hat{\Gamma}B - A'\hat{\Gamma}\Delta' = 120^0 - 45^0 - 45^0 = 30^0 \cdot$$

Επομένως το τόξο $\overset{\frown}{AA'}$ έχει μήκος: $S = \dfrac{\pi \cdot A\Gamma \cdot 30}{180} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{6}$.

Άσκηση 4



Δίνεται ένα κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ κέντρου Ο και γωνία $\widehat{xOy} = 60^0$. Να υπολογιστεί το εμβαδό του κοινού μέρους του κανονικού εξαγώνου και της γωνίας ως συνάρτηση της πλευράς α του εξαγώνου.

Λύση

Έστω ότι οι πλευρές Οx, Oy της γωνίας $\widehat{xOy}$ τέμνουν τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ του εξαγώνου στα Κ, Λ αντίστοιχα. Τότε παρατηρούμε ότι το κοινό μέρος του εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ και

της γωνίας $\widehat{xOy}$ είναι το τετραπλευρικό χωρίο ΟΚΒΛ.

Όπως γνωρίζουμε το κανονικό εξάγωνο έχει πλευρά ίση με την ακτίνα του. Άρα το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά α.

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΟΒΚ, ΟΓΛ είναι ίσα γιατί έχουν:

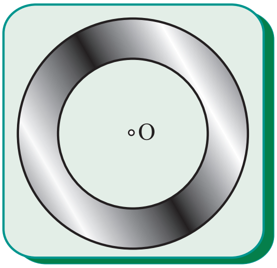
- $OB = O\Gamma = \alpha$
- $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ επειδή ισχύει: $\begin{cases} \widehat{O_1} = \widehat{xOy} - \widehat{BO\Lambda} = 60^0 - \widehat{BO\Lambda} \\ \widehat{O_2} = \widehat{BO\Gamma} - \widehat{BO\Lambda} = 60^0 - \widehat{BO\Lambda} \end{cases}$
- $\widehat{B_1} = \widehat{\Gamma_1}$ γιατί οι γωνίες $\widehat{B_1}$ και $\widehat{\Gamma_1}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (O,R) και βαίνουν στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{AE} = 120^0$ και $\overset{\frown}{BZ} = 120^0$ αντίστοιχα.

Άρα ισχύει $O\overset{\triangle}{B}K = O\overset{\triangle}{\Gamma}\Lambda$ και επομένως (ΟΒΚ) = (ΟΓΛ). Το εμβαδόν λοιπόν του τετραπλευρικού χωρίου ΟΚΒΛ είναι:

$$(OKB\Lambda) = (OB\Lambda) + (OBK) = (OB\Lambda) + (O\Gamma\Lambda) = (OB\Gamma) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

Επομένως το εμβαδόν Ε του κοινού μέρους του κανονικού εξαγώνου και της γωνίας $\widehat{xOy} = 60^0$ δίνεται από την σχέση: $E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

Άσκηση 5

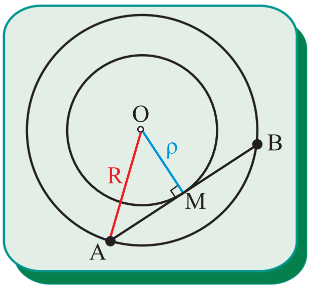


Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο,R), (Ο, ρ) με R > ρ. Το μέρος του κυκλικού δίσκου (Ο,R) στο οποίο δεν ανήκουν τα εσωτερικά σημεία του κύκλου (Ο,ρ) λέγεται κυκλικός δακτύλιος. Να δείξετε ότι:

α. Το εμβαδόν Ε του κυκλικού δακτυλίου δίνεται από τον τύπο: $E = \pi(R + \rho)(R - \rho)$

β. Το εμβαδόν Ε είναι ίσο προς το εμβαδόν ενός κύκλου που έχει διάμετρο μια χορδή του (Ο,R) η οποία εφάπτεται του (Ο,ρ).

Λύση



α. Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών δίσκων (Ο,R) και (Ο,ρ). Άρα έχουμε:

$$E = \pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi\left(R^2 - \rho^2\right) = \pi(R + \rho)(R - \rho).$$

β. Θεωρούμε χορδή ΑΒ του κύκλου (Ο,R) η οποία εφάπτεται του (Ο,ρ) έστω στο Μ. Τότε θα ισχύει $OM \perp AB$ δηλαδή το ΟΜ θα είναι το απόστημα της χορδής ΑΒ. Άρα το Μ θα είναι το μέσο της χορδής ΑΒ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ έχουμε: $AM^2 = OA^2 - OM^2 \Leftrightarrow \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 - \rho^2$ (1)

Στο προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε ότι: $E = \pi\left(R^2 - \rho^2\right)$ (2)

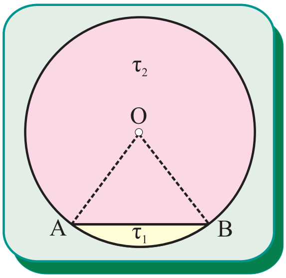
Από την (1) και την (2) προκύπτει: $E = \pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι το εμβαδό Ε είναι ίσο με το εμβαδό ενός κύκλου που έχει ακτίνα $\frac{AB}{2}$, δηλαδή έχει διάμετρο ΑΒ.

Άσκηση 6

Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών των δύο τμημάτων, στα οποία χωρίζεται ένας κύκλος από μια χορδή του $AB = \lambda_6$.

Λύση



Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και τη χορδή του $AB = \lambda_6$. Όπως γνωρίζουμε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο με πλευρά $AB = \lambda_6 = R$. Θα συμβολίσουμε με τ_1, τ_2 τα εμβαδά των δύο τμημάτων που χωρίζεται ο κύκλος από την χορδή ΑΒ.

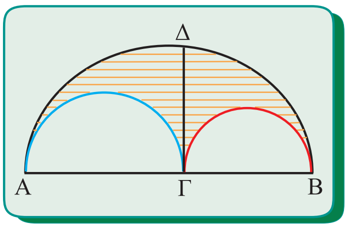
Έχουμε: $\tau_1 = \left(O.\widehat{AB}\right) - (OAB) = \frac{\pi R^2 60}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} =$

$$= \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}R^2$$

Ακόμη έχουμε: $\tau_2 = \pi R^2 - \tau_1 = \pi R^2 - \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}R^2 = \frac{12\pi - 2\pi + 3\sqrt{3}}{12}R^2 = \frac{10\pi + 3\sqrt{3}}{12}R^2$.

Επομένως ο λόγος των εμβαδών τ_1, τ_2 είναι: $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}$.

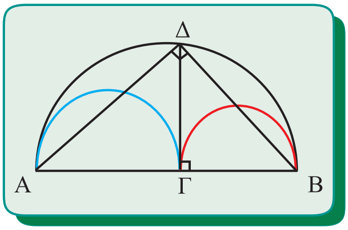
Άσκηση 7



Δίνεται ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και στο εσωτερικό του τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΓ και ΓΒ, όπου Γ σημείο μεταξύ των Α,Β. Αν η κάθετη της ΑΒ στο Γ τέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο Δ, να αποδείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου που είναι μεταξύ των τριών ημικυκλίων είναι ίσο με το εμβαδό του κύκλου διαμέτρου ΓΔ.

Λύση

Θεωρούμε τις χορδές ΔΑ, ΔΒ του κύκλου με διάμετρο ΑΒ. Επειδή η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{\text{ΑΔΒ}}$ βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή, οπότε το τρίγωνο ΔΑΒ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ.



Άρα για το ύψος του ΓΔ, ισχύει: $\text{ΓΔ}^2 = \text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ (1)

Έστω $\text{Ε}_{\text{ΑΒ}}$, $\text{Ε}_{\text{ΑΓ}}$, $\text{Ε}_{\text{ΓΒ}}$ τα εμβαδά των ημικυκλίων με διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ, ΓΒ αντίστοιχα. Τότε το εμβαδό Ε του χωρίου που είναι μεταξύ των τριών ημικυκλίων είναι:

$$\text{Ε} = \text{Ε}_{\text{ΑΒ}} - \text{Ε}_{\text{ΑΓ}} - \text{Ε}_{\text{ΓΒ}} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\text{ΑΒ}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\text{ΑΓ}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\text{ΓΒ}}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi\left(\text{ΑΒ}^2 - \text{ΑΓ}^2 - \text{ΓΒ}^2\right) =$$

$$\frac{1}{8}\pi\left[\left(\text{ΑΓ}+\text{ΓΒ}\right)^2 - \text{ΑΓ}^2 - \text{ΓΒ}^2\right] = \frac{1}{8}\pi\left(\text{ΑΓ}^2 + \text{ΓΒ}^2 + 2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ} - \text{ΑΓ}^2 - \text{ΓΒ}^2\right) =$$

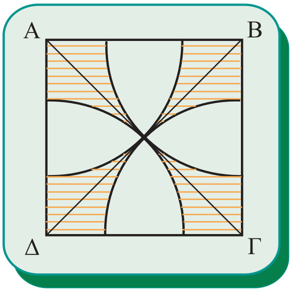
$$\frac{1}{8}\pi \cdot 2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ} = \pi\frac{\text{ΑΓ}\cdot\text{ΓΒ}}{4} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε: $\text{Ε} = \pi\frac{\text{ΓΔ}^2}{4}$ ή $\text{Ε}=\pi\left(\frac{\text{ΓΔ}}{2}\right)^2$.

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι το Ε είναι το εμβαδό κύκλου ακτίνας $\frac{\text{ΓΔ}}{2}$, δηλαδή διαμέτρου ΓΔ.

Άσκηση 8

Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά α. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα το μισό της διαγωνίου του γράφουμε τόξα που βρίσκονται στο εσωτερικό του τετραγώνου. Να βρεθεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου.



Λύση

Όπως γνωρίζουμε η διαγώνιος τετραγώνου πλευράς α είναι:

$$\text{ΑΓ} = \text{ΒΔ} = \sqrt{\alpha^2+\alpha^2} = \sqrt{2\alpha^2} = \alpha\sqrt{2}\cdot$$

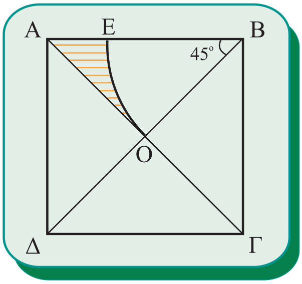
Επομένως τα τόξα που φέραμε έχουν ακτίνες $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

Έστω Ο το κέντρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ και Ε το σημείο τομής του κύκλου (Β, ΒΟ) με την πλευρά ΑΒ.

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ έχει εμβαδό:

$$\left(\text{ΑΟΒ}\right) = \frac{1}{2}\text{ΟΑ}\cdot\text{ΟΒ} = \frac{1}{2}\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha^2}{4}.$$

Επειδή ισχύει $\widehat{OBE} = \frac{\hat{B}}{2} = 45^0$, ο κυκλικός τομέας ($B.\widehat{OE}$) έχει εμβαδό:



$$E_{(B.\widehat{OE})} = \frac{\pi \cdot BO^2 \cdot 45}{360} = \frac{\pi \cdot BO^2}{8} = \frac{\pi\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2}{8} = \frac{\pi\alpha^2}{16}$$

Επομένως το μεικτόγραμμο τρίγωνο ΟΑΕ (στο σχήμα είναι γραμμοσκιασμένο) έχει εμβαδό:

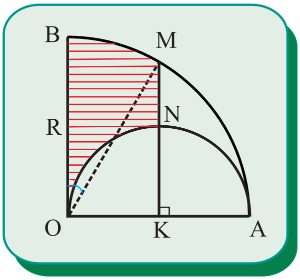
$$(OAE) = (AOB) - E_{(B.\widehat{OE})} = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\pi\alpha^2}{16} = \frac{4-\pi}{16}\alpha^2.$$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E = 8 \cdot (OAE) = 8\frac{4-\pi}{16}\alpha^2 = \frac{4-\pi}{2}\alpha^2$.

Άσκηση 9

Δίνεται ένα τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ, ακτίνας R και το ημικύκλιο διαμέτρου ΟΑ, κέντρου Κ, στο εσωτερικό του τεταρτοκυκλίου. Φέρνουμε από το Κ την κάθετη ευθεία της ΟΑ, η οποία τέμνει το ημικύκλιο στο Ν και το τεταρτοκύκλιο στο Μ. Να υπολογιστεί το εμβαδό του μεικτόγραμμου τραπεζίου ΟΒΜΝ.

Λύση



Φέρνουμε βοηθητικά την ακτίνα ΟΜ του κύκλου (Ο, R).
Παρατηρούμε ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΜ ισχύει:

$$OK = \frac{R}{2} = \frac{OM}{2}.$$

Επομένως $O\hat{M}K = 30^0$. Επειδή $O\hat{M}K = B\hat{O}M$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΟΒ, ΚΜ έχουμε ότι $\widehat{BOM} = 30^0$.
Παρατηρούμε ότι το εμβαδό Ε του μεικτόγραμμου τραπεζίου ΟΒΜΝ είναι: $E = (OBMK) - (K.\widehat{ON}) = (O.\widehat{BM}) + (OKM) - (K.\widehat{ON})$ (1)

• Ο τομέας $O.\widehat{BM}$ του κυκλικού δίσκου (Ο, R) έχει εμβαδό:

$$(O.\widehat{BM}) = \frac{\pi R^2 30}{360} = \frac{\pi R^2}{12}.$$

• Ο τομέας $K.\widehat{ON}$ του κυκλικού δίσκου $\left(K, \frac{R}{2}\right)$ έχει εμβαδό:

$$(K.\widehat{ON}) = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 90}{360} = \frac{\pi R^2}{16}$$

• Για το ορθογώνιο ΟΚΜ έχουμε: $\begin{cases} OK = \dfrac{R}{2} \\ KM = \sqrt{OM^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{R}{2}\right)^2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Άρα το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΜ έχει εμβαδό:

$$(OKM) = \frac{1}{2} OK \cdot KM = \frac{1}{2}\frac{R}{2}\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{8}$$

• Άρα η σχέση (1) γίνεται:

$$E = \left(O.\widehat{BM}\right) + \left(OKM\right) - \left(K.\widehat{ON}\right) = \frac{\pi R^2}{12} + \frac{R^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi R^2}{16} =$$

$$\frac{4\pi R^2 + 6R^2\sqrt{3} - 3\pi R^2}{48} = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{48} R^2$$

Άσκηση 10

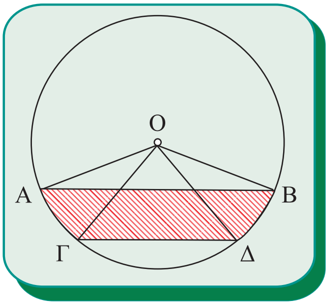
Δίνεται ένας κύκλος (Ο,R) και δύο παράλληλες χορδές του $AB = \lambda_3$ και $\Gamma\Delta = \lambda_6$ ώστε το Ο να μην είναι μεταξύ αυτών. Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδό του μεικτόγραμμου τραπεζίου που έχει κορυφές τα Α, Β, Γ, Δ.

Λύση

• Έχουμε $AB = \lambda_3 = R\sqrt{3}$ και $\Gamma\Delta = \lambda_6 = R$. Επειδή ΑΒ // ΓΔ παίρνουμε $\widehat{A\Gamma} = \widehat{B\Delta}$ δηλαδή $A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta$. Επομένως:

$$\widehat{AOB} = \widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{BO\Delta} \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 2\widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} \Leftrightarrow \widehat{\omega_3} = 2\widehat{AO\Gamma} + \widehat{\omega_6} \Leftrightarrow$$

$$\widehat{AO\Gamma} = \frac{\widehat{\omega_3} - \widehat{\omega_6}}{2} \Leftrightarrow \widehat{AO\Gamma} = \frac{120^0 - 60^0}{2} \Leftrightarrow \widehat{AO\Gamma} = \widehat{BO\Delta} = 30^0$$



Άρα τα τόξα $\widehat{A\Gamma}$, $\widehat{B\Delta}$ έχουν μήκη:

$$S_\tau = \frac{\pi R 30}{180} = \frac{\pi R}{6}$$

Επομένως η περίμετρος του μεικτόγραμμου τραπεζίου ΑΓΔΒ είναι:

$$S = AB + \Gamma\Delta + 2S_\tau = R\sqrt{3} + R + 2\frac{\pi R}{6} = \frac{3\sqrt{3} + \pi + 3}{3} R$$

• Παρατηρούμε ότι το εμβαδό του μεικτόγραμμου τραπεζίου ΑΓΔΒ είναι ίσο με την διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ, ΓΔ και δεν περιέχουν το κέντρο Ο. Άρα έχουμε:

Ε = Εμβαδό τμήματος χορδής ΑΒ - Εμβαδό τμήματος χορδής ΓΔ =

$$=\left[\left(\text{τομέας } O.\widehat{AB}\right)-(OAB)\right]-\left[\left(\text{τομέας } O.\widehat{\Gamma\Delta}\right)-(O\Gamma\Delta)\right]=$$
$$=\left(O.\widehat{AB}\right)-(OAB)-\left(O.\widehat{\Gamma\Delta}\right)+(O\Gamma\Delta)\quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι στην πλευρά AB του τριγώνου OAB, αντιστοιχεί το ύψος του α_3.

Άρα έχει εμβαδό: $(OAB)=\frac{1}{2}\lambda_3\alpha_3=\frac{1}{2}R\sqrt{3}\frac{R}{2}=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

Ακόμη το ισόπλευρο τρίγωνο ΟΓΔ έχει εμβαδό: $(O\Gamma\Delta)=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

Επειδή $A\hat{O}B=\hat{\omega}_3=120^0$, ο τομέας $O.\widehat{AB}$ έχει εμβαδό: $\left(O.\widehat{AB}\right)=\frac{\pi R^2 120}{360}=\frac{\pi R^2}{3}$

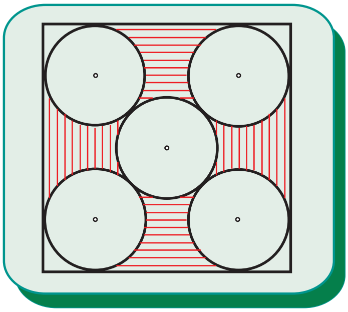
Επειδή $\Gamma\hat{O}\Delta=\hat{\omega}_6=60^0$, ο τομέας $O.\widehat{\Gamma\Delta}$ έχει εμβαδό: $\left(O.\widehat{\Gamma\Delta}\right)=\frac{\pi R^2 60}{360}=\frac{\pi R^2}{6}$.

Επομένως η (1) γράφεται:

$$E=\left(O.\widehat{AB}\right)-(OAB)-\left(O.\widehat{\Gamma\Delta}\right)+(O\Gamma\Delta)=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi R^2}{6}+\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi R^2}{6}$$

Άσκηση 11

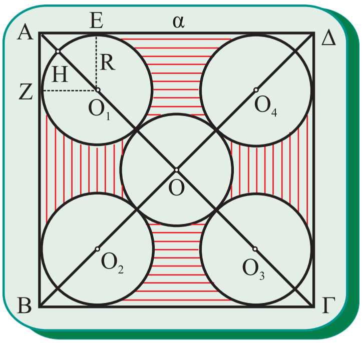
Δίνεται ένα τετράγωνο με πλευρά α και οι πέντε ίσοι κύκλοι μέσα σ' αυτό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθεί ως συνάρτηση του α το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου.



Λύση

Έστω O, O_1, O_2, O_3, O_4 τα κέντρα και R η ακτίνα των πέντε ίσων κύκλων. Έστω ακόμη Ε, Ζ τα σημεία επαφής του κύκλου (O_1, R) με το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έχουμε: $HO_1=EO_1=ZO_1=AE=AZ=R$. Επειδή η AO_1 είναι διαγώνιος του τετραγώνου AZO_1E με πλευρά R έχουμε:

$$AO_1=R\sqrt{2}\Leftrightarrow AH+HO_1=R\sqrt{2}.$$



• Επομένως το γραμμοσκιασμένο μέρος του τετραγώνου ΑΒΓΔ έχει εμβαδό:

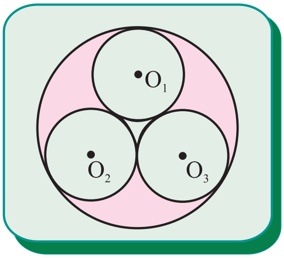
$$E_{\gamma\rho}=(AB\Gamma\Delta)-4(AZHE)-5E=$$
$$=\alpha^2-4\frac{(4-\pi)\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{16}\alpha^2-5\frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{4}\alpha^2=$$

$$\frac{4-(4-\pi)\left(\sqrt{2}-1\right)^2-5\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{4}\alpha^2=\frac{4-(4\pi+4)\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{4}\alpha^2=\left[1-(\pi+1)\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right]\alpha^2=$$

$$\left[1-(\pi+1)\left(2-2\sqrt{2}+1\right)\right]\alpha^2=\left[1-(\pi+1)\left(3-2\sqrt{2}\right)\right]\alpha^2=\left(2\pi\sqrt{2}-3\pi+2\sqrt{2}-2\right)\alpha^2$$

Άσκηση 12

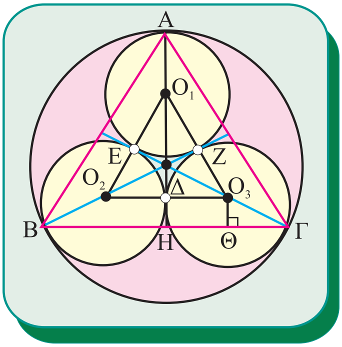
Δίνονται τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας 1 που εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο και ένας κύκλος που εφάπτεται σ' αυτούς, όπως στο σχήμα.
Να βρεθεί το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου μέρους του εξωτερικού κύκλου.



Λύση

Έστω R η ακτίνα του εξωτερικού κύκλου και A, B, Γ τα σημεία επαφής αυτού με τους κύκλους κέντρων O_1, O_2, O_3 αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ισόπλευρο με πλευρά 2. Επειδή το $O_1\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου αυτού έχουμε:

$$O_1\Delta=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$



Ακόμη ισχύει $O_2O_3=1+1=2$ και $B\Gamma=\lambda_3=R\sqrt{3}$.

Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ, $O_1O_2O_3$ είναι ισόπλευρα, συμπεραίνουμε ότι είναι όμοια. Τα ΑΗ, $O_1\Delta$ είναι ύψη των τριγώνων αυτών αντίστοιχα. Άρα έχουμε:

$$\frac{B\Gamma}{O_2O_3}=\frac{AH}{O_1\Delta}\Leftrightarrow\frac{R\sqrt{3}}{2}=\frac{AH}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow AH=\frac{3R}{2}\quad(1).$$

Αν φέρουμε $O_3\Theta\perp B\Gamma$ τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Theta\Gamma O_3$ που σχηματίζεται, ισχύει:

$$\Theta\hat{\Gamma}O_3=\frac{\hat{\Gamma}}{2}=\frac{60^0}{2}=30^0.$$

Επομένως έχουμε: $O_3\Theta=\frac{O_3\Gamma}{2}=\frac{1}{2}$ και $\Delta H=O_3\Theta=\frac{1}{2}$.

Επομένως : $AH=AO_1+O_1\Delta+\Delta H=1+\sqrt{3}+\frac{1}{2}=\sqrt{3}+\frac{3}{2}\quad(2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε: $\frac{3R}{2}=\sqrt{3}+\frac{3}{2}\Leftrightarrow R=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

• Παρατηρούμε ότι το εμβαδό του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΔΕΖ προκύπτει, αν αφαιρέσουμε από το εμβαδό του ισοπλεύρου τριγώνου $O_1O_2O_3$ τα ίσα εμβαδά των τομέων $\left(O_1.\overset{\frown}{EZ}\right),\left(O_2.\overset{\frown}{\Delta E}\right),\left(O_3.\overset{\frown}{\Delta Z}\right)$.

Έχουμε δηλαδή: $(\Delta EZ)=(O_1O_2O_3)-3\left(O_1.\overset{\frown}{EZ}\right)=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}-3\frac{\pi\cdot 1^2 60}{360}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$.

(Οι τρεις κύκλοι με κέντρα O_1, O_2, O_3 έχουν εμβαδό $\pi\cdot 1^2$). (1)

• Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E\overset{(1)}{=}\pi R^2-\left[3\pi 1^2+(\Delta EZ)\right]=\pi R^2-3\pi-\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}=$$

$$\pi\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)^2-3\pi-\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}=\pi\frac{12+12\sqrt{3}+9}{9}-3\pi-\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}=$$

$$\pi\frac{7+4\sqrt{3}}{3}-\frac{5\pi}{2}-\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}\left(8\sqrt{3}-1\right)-\sqrt{3}$$

Γ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της πρότασης και δίπλα σ’ αυτόν την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) που χαρακτηρίζει την πρόταση.

Δύο κυκλικοί τομείς του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων που αντιστοιχούν σε ίσα τόξα, έχουν ίσα εμβαδά.

2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα σ’ αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το εμβαδόν E_μ ενός κυκλικού τομέα μ μοιρών είναι:

Α. $\frac{\pi R\mu}{360}$ **Β.** $\frac{\pi R^2\mu}{360}$ **Γ.** $\frac{\pi R^2\mu}{180}$ **Δ.** $\frac{\pi R\mu}{180}$ **Ε.** $\frac{\pi R\mu^2}{360}$

3. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μια χορδή του ΑΒ = λ_6 . Στα σημεία Α και Β φέρνουμε εφαπτόμενα τμήματα που τέμνονται στο σημείο Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

4. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και οι χορδές του ΑΒ = λ_3 και ΑΓ = λ_6 , προς το ίδιο μέροςτης ευθείας ΑΟ. Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

5. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο, R) και (Ο, 2R) και σημείο Δ του κύκλου (Ο, 2R). Από το Δ φέρνουμε εφαπτόμενες ΔΑ και ΔΒ στον κύκλο (Ο, R). Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΔΑΒ.

6. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μια ακτίνα τους ΟΑ. Φέρνουμε τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσον Μ του τμήματος ΟΑ. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΒΑΓ.

7. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α, με κέντρο Α και ακτίνα το ύψος, γράφουμε τόξο στο εσωτερικό του τριγώνου που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που ορίζει η χορδή ΕΔ.

8. Αν η διάκεντρος ΚΛ δύο τεμνομένων κύκλων (Κ,R) και (Λ,R) είναι $\text{ΚΛ} = R\sqrt{3}$, να βρείτε το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων.

9. Από ένα σημείο του κύκλου (Ο, R) λαμβάνουμε δύο τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}} = 90^o$ και $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}} = \mu^o$, $\mu^0 < 90^0$ προς την ίδια διεύθυνση. Φέρνουμε τη χορδή ΓΒ και την ΑΔ παράλληλη προς αυτή. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΑΓΒΔ είναι ίσο με $\frac{\mu}{180}$ του εμβαδού του κύκλου.

10. Να εγγραφεί σε κυκλικό τομέα ακτίνας R και γωνίας 60^0 κύκλος. Να βρείτε το εμβαδόν του μέρους του κυκλικού τομέα που δεν ανήκει στον εγγεγραμμένο κύκλο.

11. Δίνεται ημικύκλιο ΑΟΒ και μια ακτίνα ΟΓ. Φέρνουμε τη διχοτόμο ΟΔ της γωνίας $\text{Γ}\hat{\text{Ο}}\text{Β}$. Να αποδείξετε ότι η διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων που αντιστοιχούν στις χορδές ΑΔ και ΒΔ είναι ίση με το εμβαδόν του κυκλικού τομέα Ο, $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$.

12. Δίνεται τεταρτοκύκλιο κέντρου Ο, ακτίνας R και τόξου $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ $\left(\overset{\frown}{\text{ΑΟΒ}} = 90^o\right)$. Στην ακτίνα ΟΒ παίρνουμε σημείο Δ, ώστε $\text{ΟΔ} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Στο Δ, φέρνουμε κάθετη στην ΟΒ που τέμνει το τόξο ΑΒ στο Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΔΓΒ.

13. Να υπολογιστεί ο λόγος των εμβαδών του εγγεγραμμένου και του περιγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο ισόπλευρου τριγώνου.

14. Σε κύκλο ακτίνας R = 2 είναι περιγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο. Να υπολογιστεί η πλευρά του και το εμβαδόν του.

Δ. "ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ"

Η ακτή μιας βιομηχανικής περιοχής και ο προστατευτικός κυματοθραύστης σχηματίζουν κύκλο ακτίνας R (εκατοντάδες μέτρα). Στα άκρα Β και Γ του κυματοθραύστη έχουν τοποθετηθεί φωτεινοί επιπλέοντες σημαντήρες, για να δείχνουν τις ασφαλείς εισόδους των πλοίων στον θαλάσσιο κόλπο της περιοχής. Ανάλογα με τις καιρικές συνθήκες τα πλοία χρησιμοποιούν τηνείσοδο Β ή Γ προκειμένου να προσαράξουν στο λιμάνι, που βρίσκεται στο σημείο Α αντιδιαμετρικά του Β. Ο θαλάσσιος χώρος έξω από τον κόλπο είναι διάσπαρτος με υφάλους και για την ασφαλή είσοδο των πλοίων ορίζεται ως γραμμή πλεύσης άλλοτε η ευθεία ΑΒ και άλλοτε η ευθεία ΑΓ. Κάποια μέρα ένα μεγάλο πλοίο βρίσκεται σε σημείο Π της ευθείας ΑΒ σε απόσταση δ (εκατοντάδες μέτρα) από το σημείο Β και ο πλοίαρχος ζητεί οδηγίες από το λιμεναρχείο για να φτάσει με ασφάλεια στο λιμάνι. Ο υπεύθυνος του λιμεναρχείου του λέει να διατηρήσει σταθερή κάθετη πορεία στην ευθεία ΑΒ έως ότου βρεθεί σε σημείο ευθυγράμμισης με τα σημεία Γ και Α. ΄Εστω ότι κατά τη στιγμή της ερώτησης του πλοιάρχου, το πλοίο φαίνεται από τα σημεία Α και Γ υπό γωνίες $\Gamma\hat{A}\Pi = \varphi$ και $A\hat{\Gamma}\Pi = 90^0 + \varphi$ αντίστοιχα.

α. Να βρείτε συναρτήσει των δ και R την απόσταση του πλοίου από το λιμάνι Α, όταν αυτό θα βρεθεί σε σημείο ευθυγράμμισης με τα σημεία Γ και Α.

β. Αν R = 16 εκατοντάδες μέτρα και δ = 4 εκατοντάδες μέτρα, να βρείτε την επιπλέον απόσταση που θα διανύσει το πλοίο μέχρις ότου φτάσει στο λιμάνι σε σχέση μ' αυτή που θα έκανε αν επιτρεπόταν η είσοδός του από το σημείο Β;

Επαναληπτικά Θέματα

Επαναληπτικά Θέματα

Θέμα 1ο

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ). Φέρνουμε ΔΕ // ΒΓ (Δ∈ ΒΓ, Ε∈ ΑΓ). Να δειχθεί ότι:

$$BE^2 = E\Gamma \cdot \Delta E$$

Θέμα 2ο

Στη διαγώνιο ΒΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε τυχαίο σημείο Ο. Να δειχθεί ότι:

$$\Gamma\Delta^2 - \Gamma O^2 = O\Delta \cdot O\Delta$$

Θέμα 3ο

Η διάμεσος ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του ΑΒΓ στο Ε, να δειχθεί ότι:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2 \cdot AM \cdot AE$$

Θέμα 4ο

Αν Ο το μέσο της πλευράς ΑΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ), να δειχθεί ότι:
(ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΟΒΓ)

Θέμα 5ο

ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο και Σ το σημείο τομής των ΑΓ, ΒΔ. Να δειχθεί:

α. ΑΓ = 3ΓΣ

β. $H\Gamma = \frac{1}{3}EH$, όπου Η το σημείο τομής των ΒΔ, ΓΕ.

Θέμα 6ο

Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΔ, ΓΕ κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ, τότεQ

$$O\Gamma 2 = EO \cdot E\Gamma$$

Θέμα 7ο

Με διαμέτρους τα τρία ίσα μέρη ΑΔ = ΔΕ = ΕΒ που χωρίζεται η διάμεσος ΑΒ κύκλου (Ο, R), γράφουμε τρία ημικύκλια τα δύο προς το ίδιο μέρος τη ΑΒ. Να βρεθί ο λόγς των εμβαδών των δύο μερών που ο κύκλος (Ο, R) χωρίζεται από τα τρία ημικύκλια.

Θέμα 8ο

Αν Δ τυχαίο σημείο στη βάση ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να δειχθεί ότι:

$$ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ \cdot ΔΓ$$

Θέμα 9ο

Σε κύκλο (Ο,R) με διάμετρο ΑΒ, η χορδή ΓΔ // ΑΒ. Αν Μ τυχαίο σημείο της ΑΒ να δειχθεί ότι: $ΜΓ^2 + ΜΔ^2 = ΜΑ^2 + ΜΒ^2$

Θέμα 10ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, το Η είναι ορθόκεντρο. Να δειχθεί ότι: $ΗΒ^2 - ΗΓ^2 = ΑΒ^2 - ΑΓ^2$.

Θέμα 11ο

Σε κύκλο (Ο,R) το σημείο Γ βρίσκεται στην προέκταση της διαμέτρου ΑΒ. Αν ΓΔ το εφαπτόμενο τμήμα και η ΑΔ τέμνει την κάθετη στην ΑΓ, τη Γx, στο Ε, να δειχθεί ότι:

$$ΓΔ^2 = ΑΓ^2 - ΑΔ \cdot ΔΕ$$

Θέμα 12ο

Αν Ο τυχαίο σημείο εκτός της γωνίας Α και της κατα κορυφήν της στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, να δειχθεί ότι: $(ΟΑΓ) = (ΟΑΒ) + (ΟΑΔ)$.

Θέμα 13ο

Αν Μ το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου και της υποτείνουσας ΒΓ ορθ. τριγώνου ΑΒΓ, να δειχθεί ότι: $(ΑΒΓ) = ΒΜ \cdot ΜΓ$.

Θέμα 14ο

Αν ΚΛ και ΜΝ χορδές κάθετες στον κύκλο (Ο,R), να δειχθεί ότι: $(ΟΚΜ) = (ΟΛΝ)$.

Θέμα 15ο

Σε κύκλο (Ο,R) έχουμε τις χορδές $ΑΒ = R$, $ΑΓ = R\sqrt{2}$ προς το ίδιο μέρος του Α. Να δειχθεί ότι $ΒΓ = λ_{12}$ και να βρεθεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου ΑΒΓ.

ΕΜΒΑΔΑ

Θεμα 16ο

Αν Κ είναι το βαρύκεντρο τριγώνου ΑΒΓ, τότε: $(ΚΑΒ) = (ΚΒΓ) = (ΚΑΓ) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ)$

Θέμα 17ο

Παραλληλόγραμμου οι δυο προσκείμενες πλευρές έχου μήκη 6m, 8m και σηχματίζουν γωνία 60°. Να βρεθούν οι διαγώνιοι και το εμβαδόν του.

Θέμα 18ο

Από σημείο Σ μιας διαγωνίου παραλληλογράμμου φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές οπότε σχηματίζονται τέσσερα παραλληλόγραμμα. Να αποδειχθεί ότι δύο από τα 4 παραλληλόγραμμα είναι ισοδύναμα.

Θέμα 19ο

Από τις κορυφές τετραπλεύρου φέρουμε παράλληλες προς τις διαγώνιες. Να δειχθεί ότι σχηματίζεται παρ/μο με διπλάσιο εμβαδόν από το τετράπλευρο. (ΔΕΖΗ) = 2(ΑΒΓΔ)

Θέμα 20ο

Τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου ορίζουν παρ/μο που έχει εμβαδόν το μισό από το εμβαδόν του τετραπλεύρου 2(ΔΕΖΗ) = (ΑΒΓΔ).

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ - ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

Θέμα 21ο

Να βρεθεί το εμβαδόν του μικρότερου κυκλικού τμήματος, που ορίζει σε κύκλο (O,R) η πλευρά:

α. ισοπλεύρου τριγώνου **β.** τετραγώνου **γ.** εξαγώνου

Θέμα 22ο

Να δειχθεί ότι το εμβαδόν της κυκλικής στεφάνης δύο ομόκεντρων κύκλων, είναι ίσο με το εμβαδόν του κύκλου, που έχει διάμετρο τη χορδή του μεγαλύτερου που εφάπτεται στον μικρότερο κύκλο.

Θέμα 23ο

Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο κανονικό εξάγωνο. Να βρεθεί το εμβαδόν του μέρους του κύκλου που βρίσκεται εκτός του εξαγώνου.

Θέμα 24ο

Κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα R γράφουμε τόξο ΒΖ μέσα στο εξάγωνο. Να βρεθεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου πενταγώνου.

Θέμα 25ο

Να βρεθεί το εμβαδόν του κύκλου που είναι εγγεγραμμένος σε κυκλικό τομέα ακτίνας R και γωνίας: **α.** 60° **β.** 120° **γ.** 90°

Θέμα 26ο

Προεκτείνουμε τυχαία ακτίνα ΟΑ κύκλου (Ο,R) κατά τμήμα ΑΒ = R και φέρνουμε την εφαπτομένη ΒΓ. Να βρεθεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

Θέμα 27ο

Δίνεται κύκλο (Ο, R) και διάμετρος ΑΒ. Γράφουμε κύκλο (Α, λ4). Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων.

Θέμα 28ο

Ένα κανονικό ν-γωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 10. Το σύστημα του ν-γωνου έχει μήκος $\sqrt{75}$.

α. Να βρείτε το μήκος της πλευράς του ν-γωνου και το είδος του.
β. Να βρείτε το εμβαδόν του.
γ. Ένα άλλο κανονικό ν-γωνο σχηματίζεται από τις εφαπτόμενες στις κορυφές του πρώτου. Να βρείτε το είδος του κανονικού ν-γωνου που σχηματίζεται με αυτόν τον τρόπο και να υπολογίσετε της ακτίνα του.

Θέμα 29ο

α. Ένα ρολόι έχει λεπτοδείκτη 5cm. Ποιά απόσταση θα διανύσει η μύτη του λεπτοδείκτη από τις 9 το πρωί εώς τις 3 το απόγευμα;
β. Ο κυλιόμενος διάδρομος σε ένα αεροδρόμιο λαμβάνει κίνηση από ένα τροχό ακτίνας 10cm. Ποια απόσταση θα διανύσει μια βαλίτσα επάνω στο διάδρομο αν ο τροχός εκτελέσει 20 περιστροφές;

Θέμα 30ο

Η Ελλάδα έχει έκταση 132.000km2. Η έκταση αυτή είναι περίπου ίση με το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας:

Α. 205km **Β.** 405km **Γ.** 505km **Δ.** 1005km **Ε.** 55km

Θέμα 31ο

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και δύο ακτίνες ΟΑ, ΟΒ που σχηματίζουν γωνία 60°. Αν ΒΓ είναι η απόσταση του Β από την εφαπτομένη στο Α, να υπολογισθεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

Θέμα 32ο

Παρ/μου ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ κατά τμήματα ΒΕ = ΑΒ, ΓΖ = ΒΓ, ΔΗ = ΓΔ και ΑΘ = ΔΑ. Να δειχθεί ότι (ΕΖΗΘ) = 5(ΑΒΓΔ).

Θέμα 33ο

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Ο στο εσωτερικό του. Από το Ο φέρνουμε τις κάθετες, ΟΚ στην ΑΒ ώστε ΟΚ = ΑΒ, ΟΛ στη ΒΓ, ώστε ΟΛ = ΒΓ, ΟΜ στη ΓΔ, ώστε ΟΜ = ΓΔ και ΟΝ στη ΔΑ, ώστε ΟΝ = ΔΑ. Να δειχθεί ότι: (ΚΛΜΝ) = 2(ΑΒΓΔ).

Θέμα 34ο

Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του τραπεζίου, που έχει κορυφές τα άκρα διαμέτρου ΑΒ κύκλου (Κ, R) και τις προβολές τους Δ και Ε στην εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου, είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Θέμα 35ο

Αν ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές και οι μη παράλληλες πλευρές του τέμνονται κάθετα, τότε $(ΑΒΓΔ)=\frac{α^2-β^2}{4}$ (όπου (ΑΒ) = α, (ΓΔ) = β και α > β).

Θέμα 36ο

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) δίνονται (ΑΒ) = α και (ΓΔ) = β. Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων, να δειχθεί ότι $(ΟΔΓ)-(ΟΑΒ)=\frac{β-α}{2}\cdot υ$, όπου υ το ύψος του τραπεζίου και β > α.

Θέμα 37ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Η το ορθόκεντρο. Με διάμετρο τη ΒΓ γράφουμε κύκλο, που τέμνει το ύψος ΑΔ στο Ρ. Να δειχθεί ότι: $(ΒΓΡ)^2$ = (ΑΒΓ) (ΒΗΓ).

Θέμα 38ο

Αν Σ σημείο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ και οι ευθείες ΑΣ, ΒΣ και ΓΣ τέμνουν τις ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα Δ, Ε και Ζ, τότε ισχύει: $\frac{ΣΔ}{ΑΔ}+\frac{ΣΕ}{ΒΕ}+\frac{ΣΖ}{ΓΖ}=1$.

Θέμα 39ο

Σε κάθε τρίγωνο με πλευρές α, β, γ και διαμέσους $μ_α$, $μ_β$, $μ_γ$ ισχύει:

$$(β^2-γ^2)μ_α^2+(γ^2-α^2)μ_β^2+(α^2-β^2)μ_γ^2=0$$

Θέμα 40ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ να δειχθούν οι σχέσεις:

α. $(R_\alpha-\rho)(R_\beta-\rho)(R_\gamma-\rho)=4R\rho^2$ **β.** $\upsilon_\alpha=\dfrac{2R_\beta R_\gamma}{R_\beta+R_\gamma}$

γ. $E=\dfrac{\alpha\rho R_\alpha}{R_\alpha-\rho}$ **δ.** $\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha^2=4\rho R_\alpha$

Θέμα 41ο

Στο τρίγωνο ΑΒΓ να δειχθούν οι σχέσεις:

α. $\dfrac{\beta-\gamma}{R_\alpha}+\dfrac{\gamma-\alpha}{R_\beta}+\dfrac{\alpha-\beta}{R_\gamma}=0$ **β.** $E=\rho R_\beta\sqrt{\dfrac{R_\alpha+R_\gamma}{R_\beta-\rho}}$

Θέμα 42ο

Αν Ο και O_α το έγκεντρο και το παράκεντρο της ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, να δειχθεί ότι:

α. $(AO)=\sqrt{\dfrac{\beta\cdot\gamma(\tau-\alpha)}{\tau}}$ **β.** $(AO_\alpha)=\sqrt{\dfrac{\beta\cdot\gamma\cdot\tau}{\tau-\alpha}}$

Θέμα 43ο

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $2\alpha=\beta+\gamma$, να δειχθεί ότι: $\delta_\alpha=\dfrac{1}{2}\sqrt{3\beta\gamma}$

Θέμα 44ο

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και τα σημεία Α, Β συμμετρικά ως προς το Ο. Αν ΜΝ τυχαία χορδή του κύκλου, που περνάει από το Β να δειχθεί ότι: $(AM)^2+(AN)^2+(MN)^2=\sigma\tau\alpha\theta.$

Θέμα 45ο

Αν τα σημεία Α, Β είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο Ο κύκλου (Ο, R) και από τα Α και Β δύο τμήματα ΑΜ και "ΒΝ ομόρροπά παρ/λα μέχρι το κύκλο, να δειχθεί ότι:

$$(AM).(BN)=\sigma\tau\alpha\theta.$$

Θέμα 46ο

Αν Μ τυχαίο σημείο του κύκλου (Κ, R) και (Λ, ρ) κύκλος που δεν τέμνει τον (Κ, R), να δειχθεί ότι: $\Delta\upsilon\nu_{(\Lambda,\rho)}M=2(K\Lambda)(MO)$ όπου ΜΟ η απόσταση του Μ από τον ριζικό άξονα των δύο κύκλων.

Θέμα 47ο

Δύο κύκλοι τέμνονται ορθογώνια στα Α, Β όταν και μόνον όταν οι χορδές ΣΑ, ΣΒ, από τυχαίο σημείο Σ του ενός, τέμνουν τον άλλο κύκλο σε αντιδιαμετρικά σημεία.

Θέμα 48ο

Αν ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο και Σ το σημείο που τέμνονται οι ΑΓ και ΒΔ, να δειχθεί ότι: ΑΓ = 3·ΓΣ. Αν Η το σημείο που τέμνονται οι ΒΔ και ΓΕ, να δειχθεί ότι:

$$ΗΓ = \frac{1}{3}\cdot ΕΗ$$

Θέμα 49ο

Κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ο. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ, αν είναι γνωστή η ακτίνα R.

Θέμα 50ο

Αν Η το μέσο της πλευράς ΓΔ κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ πλευράς α, να βρεθεί το εμβαδόν των μέρων ΑΒΓΗ και ΑΗΔΕΖ του εξαγώνου.

Θέμα 51ο

Να δειχθεί ότι: $\lambda_5^2 = \lambda_{10}^2 + \lambda_6^2$

Θέμα 52ο

Να δειχθεί ότι το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου Μ από τις πλευρές πολυγώνου είναι σταθερό.

Θέμα 53ο

Σε κύκλο (Ο, R) παίρνουμε διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ} = 60^0$, $\overset{\frown}{ΒΓ} = 90^0$, $\overset{\frown}{ΓΔ} = 120^0$. Να δειχθεί ότι το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, ότι $ΑΓ \perp ΒΔ$ και να βρεθεί το μήκος των πλευρών και των διαγωνίων του.

Θέμα 54ο

Σε κύκλο (Ο,R) οι διάμετροι ΑΒ, ΓΔ είναι κάθετοι. Αν Μ το μέσο της ακτίνας ΟΒ και ο κύκλος (Μ, ΜΓ) τέμνει την ΟΑ στο Ν, να δειχθεί ότι: $ΝΟ = \lambda_{10}$ και $ΝΓ = \lambda_5$.

Θέμα 55ο

Αν $Π_1$ και $Π_2$ είναι οι περίμετροι $Ε_1$, $Ε_2$ τα εμβαδά δύο κανονικών πολυγώνων με το ίδιο πλήθος πλευρών, να δειχθεί ότι: $\frac{E_1}{E_2}=\frac{Π_1^2}{Π_2^2}$.

Θέμα 56ο

Σε σημείο Α κύκλου (Ο,R) φέρνουμε την εφαπτομένη και ορίζουμε τμήμα $(AB)=\frac{R}{2}$. Γράφωουμε τον κύκλο (Ο, ΟΒ), που τέμνει την ΒΑ στο Γ. Να δειχθεί ότι $ΑΓ = λ_{10}$ του κύκλου (Ο, R).

Θέμα 57ο

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $\frac{α\sqrt{2}}{2}$ γράγω τόξα, που τέμνουν τις πλευρές του τετραγώνου και ορίζουν οκτάγωνο. Να δειχθεί ότι το οκτάγωνο είναι κανονικό και να βρεθεί το εμβαδόν του.

Θέμα 58ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τυχαίο σημείο Ρ της ΒΓ και στο Α φέρνουμε ευθεία $ε \perp ΑΡ$, $ΒΒ_1 \perp ε, ΓΓ_1 \perp ε$. Να αποδειχθεί ότι: $(ΡΒ_1Γ_1)=(ΑΒΓ)$.

Θέμα 59ο

Έστω ΑΒ και ΓΔ χοεδές ενός κύκλου (Ο, R) που τέμνονται κάθετα στο Ρ. Να αποδειχθεί ότι: (ΟΑΓ) = (ΟΒΔ).

Θέμα 60ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $Α\hat{Β}Γ\left(\hat{Α}=1^{\llcorner}\right)$ και $\hat{Β}=30^0$. Φέρνουμε τη διάμεσο ΓΔ και την $ΔΕ \perp ΒΓ$. Να δειχθεί $(ΒΔΕ)=\frac{3}{8}(ΑΓΔ)$.

Θέμα 61ο

Δίνεται τρίγωνο $Α\hat{Β}Γ$ και σημεία Δ, Ε των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε

$Α\Delta = \frac{2}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{3}{4}ΑΓ$. Από το μέσο Μ της πλευράς ΑΓ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει τη ΒΓ στο Η. Να δειχθεί $(ΑΒΗ) = (Β\Delta ΓΕ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$.

Θέμα 62ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΒΓΔΕ και σημείο Α στο εσωτερικό του. Κατασκευάζουμε τα παραλληλόγραμμα ΓΔΖΑ και ΒΕΖΑ. Να δειχθεί ότι: (ΒΓΔΕ) = (ΓΑΖΔ) + (ΒΕΖΑ).

Θέμα 63ο

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και δύο κάθετες ακτίνες του ΟΑ και ΟΒ. Με διάμετρο την ΑΒ γράφουμε εκτός του κύκλου ημιπεριφέρεια. Να δείξετε ότι ο μηνίσκος που σχηματίστηκε έχει ίδιο εμβαδό με το τρίγωνο ΟΑΒ.
Μηνίσκος είναι το σχήμα που περικλείεται από δύο τόξα που έχουν κοινή χορδή και βρίσκοντια προς το ίδιο μέρος της.

Θέμα 64ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 30^0$. Αν ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα δείξτε ότι $(Α\Delta Ε) = \frac{3}{4}(ΑΒΓ)$.

Θέμα 65ο

Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ θεωρούμε επί των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ αντίστοιχα και τέτοια ώστε: $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΒΖ}{ΖΓ} = \frac{ΓΗ}{Η\Delta} = \frac{\Delta\Theta}{\Theta Α} = \frac{\mu}{\nu}$, όπου $\frac{\mu}{\nu}$ δοσμένος λόγος. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ ως συνάρτηση του εμβαδού του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Θέμα 66ο

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R), την διάμεσο ΑΔ αυτού που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και Θ στο κ. βάρους του τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΒΘΓΜ είναι παραλληλόγραμμο.

Θέμα 67ο

Αν ΑΒΓΔ τραπέζιο και Ε, Ζ τα μέσα των βάσεων του ΑΒ, ΓΔ. Ν' αποδειχθεί ότι: (ΗΑΔ)=(ΗΒΓ), αν Η σημείο της ΕΖ.

Θέμα 68ο

Στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Α΄ Β΄ Γ΄ ώστε $BA' = \frac{1}{3}B\Gamma,\ \Gamma B' = \frac{1}{3}\Gamma A,\ A\Gamma' = \frac{1}{3}AB$. Να αποδειχθεί ότι: $(A'B'\Gamma') = \frac{1}{3}(AB\Gamma)$.

Θέμα 69ο

Από εσωτερικό σημείο Ο κυρτού τετράπλευρου ΑΒΓΔ φέρω ΟΑ΄, ΟΒ΄, ΟΓ΄, ΟΔ΄ κάθετες και ίσες προς τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι: $(A'B'\Gamma'\Delta') = 2(AB\Gamma\Delta)$.

Θέμα 70ο

Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ = 2ρ. Ένα σημείο Γ χωρίζει την ΑΒ σε λόγο $\frac{1}{2}$. Με διαμέτρους ΑΓ και ΓΒ γράφουμε ημικύκλια εκατέρωθεν της ΑΒ. Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών των δύο χωρίων που ορίζονται από τον κύκλο (Ο, ρ) και τα δύο ημικύκλια.

Θέμα 71ο

Ισόπλευρο τρίγωνο $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν το εμβαδόν του μη κοινού μέρους του κυκλ. δίσκου (Ο, R) και του τριγώνου $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ είναι $E = 4\pi - 3\sqrt{3}$, να υπολογισθούν τα α και R.

Φίλοι μαθητές και μαθήτριες,
Μην ξεχνάτε:
Με φωτοτυπίες και πρόχειρες
σημειώσεις
δεν γίνεται σωστό διάβασμα!

Εμείς έχουμε τη λύση και τα κατάλληλα βιβλία, για ουσιαστική μελέτη, που θα σας οδηγήσει στις καλύτερες σχολές των Α.Ε.Ι.

Η Επιλογή των βιβλίων και η απόφαση για συστηματικό διάβασμα **ΔΙΚΗ ΣΑΣ**.
Εμείς εργαστήκαμε με βάση την ύλη που καθορίζεται από το Υπουργείο Παιδείας και **καταθέτουμε τη πρότασή μας**.

Εσείς μπορείτε να διαλέξετε, για να γνωρίσετε την καινούργια μας δουλειά,

1 βιβλίο δωρεάν
σε όλους τους μαθητές και καθηγητές!

Διαλέξτε από τον κατάλογο που υπάρχει στις επόμενες σελίδες, 1 ΒΙΒΛΙΟ για να γνωρίσετε την καινούργια μας σειρά που κυκλοφορεί με μεγάλη επιτυχία σε όλη την Ελλάδα.

Τηλεφωνήστε στο:
210 - 21.14.630-39

Να σας το στείλουμε ΔΩΡΕΑΝ με courier, στο σπίτι σας! (έξοδα αποστολής 5 €)

Χρησιμοποιήστε δημιουργικά το χρόνο σας, μελετώντας με ένα σωστό πρόγραμμα, χωρίς άγχος. Αυτό θα σας οδηγήσει στην επίτευξη του τελικού σας σκοπού, που είναι η επιτυχία.
Εμείς θα είμαστε κοντά σας με την ευχή, τα όνειρά σας να γίνουν πραγματικότητα.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΑ ΣΥΝΕΡΓΑΖΟΜΕΝΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΠΑΝΤΑ ΔΙΠΛΑ ΣΑΣ